LINEĀRĀ ALGEBRA

Pēteris Daugulis

Matemātisko pētījumu centrs, Matemātikas katedra, Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte, Daugavpils Universitāte, Daugavpils, Latvija

SATURS

1. NODAĻA

Ievads matricu algebrā

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi.

Par *matricu* sauksim galīgu taisnstūrveida tabulu, kuras rūtiņās ir ierakstīti skaitļi vai cita gredzena elementi - *matricas elementi.*

Piemērs 1.1. $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & 0 & a \\ \hline -3 & b & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$.

Matricas elementus, kas atrodas vienā rindā vai kolonnā (ailē), sauksim par *matricas rindu* vai *kolonnnu.* Matricu ar m rindām un n kolonnām sauksim par $m \times n$ matricu.

Piemērs 1.2. 2×2 matrica - $\left[\begin{array}{c|c} 7 & -2 \\ \hline 3 & 0 \end{array}\right]$.

Matricu rindas, kolonnas un elementus indeksēsim (piešķirsim adreses, koordinātes) sākot no augšējā kreisā stūra. Vispārīga $m \times n$ matrica tiek apzīmēta šādi:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right] = [a_{ij}]_{m,n}.$$

Tādējādi elements a_{ij} atrodas i-tajā rindā un j-tajā kolonnā. a_{ij} var apzīmēt arī ar $[\mathbf{A}]_{ij}$. Ja $m = 0$ vai $n = 0$, tad matricu sauksim par *tukšu.* Divas matricas sauksim par vienādām, ja tām

(1) sakrīt rindu un kolonnu skaits,
(2) katrā adresē (rūtiņā) matricu elementi ir vienādi.

Visu $m \times n$ matricu kopu, kuru elementi pieder kopai R, apzīmēsim ar $\mathcal{M}at(m, n, R)$. Visbiežāk R ir gredzens, to sauksim par *matricas koeficientu gredzenu.*

Matricu var uzskatīt arī par tās rindu vai kolonnu savienojumu:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right].$$

Par matricas *galveno diagonāli* sauksim diagonāli, kas sākas ar matricas augšējo kreiso stūri. Tādējādi matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ galvenā diagonāle ir elementu kopa $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{ii}, ...\}$. Ja ir dota matrica $\mathbf{A}$, rindu indeksu kopa I un kolonu indeksu kopa J, tad par $\mathbf{A}$ $[I, J]$-*apakšmatricu* sauksim matricu $\mathbf{A}[I, J]$, kuras elementu indeksi pieder kopām I un J.

Piemērs 1.3. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$, $A[\{1, 3\}, \{2, 3\}] = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right]$.

PIEZĪME 1.4. Matricas (tabulas) ir visplašāk izplatītais veids, kā sakārtot skaitļu kopu. Retāk izmantots veids ir skaitļu ierakstīšana grafu virsotnēs.

1.1.2. Speciāla veida matricas.

Rindas matrica - $1 \times n$ matrica. *Kolonnas matrica* - $m \times 1$ matrica. Jebkurš koeficientu gredzena elements var tikt uzskatīts par 1×1 matricu.

PIEMĒRS 1.5. $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$ - rindas matrica. $\left[\begin{array}{c} 6 \\ \hline -3 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ - kolonnas matrica.

Kvadrātveida matrica - matrica, kuras rindu skaits ir vienāds ar kolonnu skaitu - matricas *izmēru*. Visu kvadrātveida $n \times n$ matricu kopu ar elementiem gredzenā R apzīmēsim ar $\mathcal{M}at(n, R)$. Kvadrātveida matricu apzīmēšanai parasti izmanto vienu indeksu.

Nulles matrica $\mathbf{0}$ vai $\mathbf{0}_{m,n}$ - $[0]_{m,n}$.

Bāzes matrica $\mathbf{E}_{ij}$ - matrica, kuras visi elementi, izņemot elementu ar koordinātēm (i, j), ir vienādi ar 0 un elements ar koordinātēm (i, j) ir vienāds ar 1. Tādējādi $m \times n$ bāzes matricu skaits ir mn.

PIEMĒRS 1.6. $\mathbf{E}_{12} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ - bāzes matrica.

Vienības matrica $\mathbf{E}_n$ - $n \times n$ matrica, kuras elementi uz galvenās diagonāles ir vienādi ar 1 un visi pārējie elementi ir vienādi ar 0:

$$[\mathbf{E}_n]_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = j, \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

PIEMĒRS 1.7. $\mathbf{E}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{E}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array}\right]$ - vienības matricas.

Diagonāla matrica - kvadrātveida matrica, kuras elementi ārpus galvenās diagonāles ir vienādi ar 0.

PIEMĒRS 1.8. $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$ - diagonāla matrica.

Augšēji (apakšēji) trijstūrveida matricu - matrica, kuras visi elementi zem (virs) galvenās diagonāles ir vienādi ar 0.

PIEMĒRS 1.9. $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ - augšēji trijstūrveida matrica.

Simetriska matrica - kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$, kurai visiem indeksu pāriem (i, j) izpildās sakarība $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}$. *Antisimetriska matrica* - kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$, kurai visiem indeksu pāriem (i, j) izpildās sakarība $[\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ji}$.

Piemērs 1.10. $\left[\begin{array}{c|c|c} 4 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$ - simetriska matrica. $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$ - antisimetriska matrica.

Ermita matrica - kvadrātveida kompleksa matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$, kurai visiem indeksu pāriem (i, j) izpildās sakarība $[\mathbf{A}]_{ij} = \overline{[\mathbf{A}]_{ji}}$. *Anti-Ermita matrica* - kvadrātveida kompleksa matrica $\mathbf{A}$, kurai visiem indeksu pāriem (i, j) izpildās sakarība $[\mathbf{A}]_{ij} = -\overline{[\mathbf{A}]_{ji}}$.

Piemērs 1.11. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1+i & 2-i \\ \hline 1-i & 1 & i \\ \hline 2+i & -i & -1 \end{array}\right]$ - Ermita matrica. $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1+i & 2-i \\ \hline -1+i & i & -3+2i \\ \hline -2-i & 3+2i & -2i \end{array}\right]$ - anti-Ermita matrica.

Bloku matricas - nereti ir lietderīgi ar horizontālām un vertikālām atdalošām līnijām sadalīt matricu apakšmatricās - *blokos* un uzskatīt matricu par *bloku matricu*.

Piemērs 1.12. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$.

Speciālgadījums - matricas rindu un kolonnu reprezentācija:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{k}_1 & ... & \mathbf{k}_n \end{array}\right].$$

1.1.3. Matricu grafiskās interpretācijas.

Matricai $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$ var piekārtot orientētu divdaļīgu grafu $\Gamma_{\mathbf{A}} = (V_2, E_2)$ šādā veidā:

- $V_2 = R \cup K$, kur $R = \{r_1, ..., r_m\}$, $K = \{k_1, ..., k_n\}$,
- katram pārim (i, j) atbilst orientēta šķautne $k_j \xrightarrow{a_{ij}} r_i$ (ja $a_{ij} = 1$, tad indeksu pie šķautnes parasti nenorāda), $E_2 = \bigcup\limits_{i,j} \{k_j \xrightarrow{a_{ij}} r_i\}$.

Piemērs 1.13. Matricai $\left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ atbilst grafs

$$\begin{tikzcd} k_1 \arrow[r] & r_1 \\ k_2 \arrow[ur, "a"] \arrow[r] & r_2 \end{tikzcd}$$

Kvadrātveida matricai $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$ var piekārtot orientētu grafu $\Delta_{\mathbf{A}} = (V_1, E_1)$ šādā veidā:

- $V_1 = R = \{r_1, ..., r_m\}$,
- katram pārim (i, j) atbilst orientēta šķautne $k_j \overset{a_{ij}}{\to} r_i$ (ja $a_{ij} = 1$, to parasti nenorāda), $E_1 = \bigcup\limits_{i,j} \{k_j \overset{a_{ij}}{\to} r_i\}$.

Piemērs 1.14. Matricai $\left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ atbilst grafs $\mathbf{r}_2 \xrightarrow{a} \mathbf{r}_1$.

1.2. Matricu operācijas

1.2.1. Rindu un kolonnu operācijas.

1.2.1.1. *Rindu un kolonnu izsvītrošana.* Dota matrica $\mathbf{A}$, tās rindu indeksu kopa I un kolonnu indeksu kopa J. Ar $\mathbf{A}(I,J)$ apzīmēsim matricu, ko iegūst, pēctecīgi izsvītrojot no $\mathbf{A}$ rindas ar indeksiem no I un kolonnas ar indeksiem no J un "sabīdot kopā" atlikušos matricas elementus.

Piemērs 1.15. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}\Big(\{1\},\{2\}\Big) = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right]$.

1.2.1.2. *Rindu (kolonnu) mainīšana vietām.* Dota matrica $\mathbf{A}$, divi indeksi p,q. Ar $R_{pq}(\mathbf{A})$ (vai $K_{pq}(\mathbf{A})$) apzīmēsim matricu, ko iegūst, apmainot vietām dotās rindas (vai kolonnas).

Piemērs 1.16. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$, $R_{12}(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$.

1.2.1.3. *Rindas (kolonnas) elementu reizināšana ar fiksētu skaitli.* Dota matrica $\mathbf{A}$, indekss p un skaitlis λ. Ar $R_p(\lambda)(\mathbf{A})$ (vai $K_p(\lambda)(\mathbf{A})$) apzīmēsim matricu, ko iegūst, reizinot $\mathbf{A}$ p-to rindu (kolonnu) ar λ.

Piemērs 1.17. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$, $R_1(-2)(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & -6 & -2 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$.

1.2.1.4. *Rindas saskaitīšana ar citu rindu, reizinātu ar kādu skaitli.* Dota matrica $\mathbf{A}$, divi dažādi indeksi p,q un skaitlis λ. Ar $R_{pq}(\lambda)(\mathbf{A})$ apzīmēsim matricu, ko iegūst no $\mathbf{A}$, pieskaitot rindai ar indeksu q rindu ar indeksu p, reizinātu ar λ.

Piemērs 1.18. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$,

$$R_{2,1}(-2)(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1+(-2)\cdot 2 & 3+(-2)\cdot(-1) & 1+(-2)\cdot 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} -3 & 5 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

1.2.1.5. *Kolonnas saskaitīšana ar citu kolonnu, reizinātu ar kādu skaitli.* Dota matrica $\mathbf{A}$, divi dažādi indeksi p,q un skaitlis λ. $K_{p,q}(\lambda)(\mathbf{A})$ - matrica, ko iegūst no $\mathbf{A}$, pieskaitot kolonnai ar indeksu q kolonnu ar indeksu p, reizinātu ar λ.

Piemērs 1.19. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$,

$$K_{2,1}(-2)(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1+(-2)\cdot 3 & 3 & 1 \\ \hline 2+(-2)\cdot(-1) & -1 & 0 \\ \hline 3+(-2)\cdot 3 & 3 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} -5 & 3 & 1 \\ \hline 4 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

1.2.2. Matricu savienošana.

Atbilstošu izmēru matricas var savienot bloku matricās. Svarīgākie speciālgadījumi:

- horizontālā savienošana - ja $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_l$ - matricas ar vienādu rindu skaitu, tad matricu $[\mathbf{A}_1|...|\mathbf{A}_l]$ sauksim par to *horizontālo savienojumu;*
- vertikālā savienošana - ja $\mathbf{B}_1, ..., \mathbf{B}_l$ - matricas ar vienādu kolonnu skaitu, tad matricu $\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1\\ \hline ...\\ \hline \mathbf{B}_l\end{array}\right]$ sauksim par to *vertikālo savienojumu;*
- diagonālā savienošana - ja $\mathbf{D}_1, ..., \mathbf{D}_l$ - jebkādas kvadrātveida matricas, tad matricu
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & ... & \mathbf{0}\\ \hline ... & ... & ... & ...\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{D}_4\end{array}\right]$$
sauksim par to *diagonālo savienojumu.*

Piemērs 1.20. $\mathbf{A}$ - $m \times n$ matrica, $\mathbf{b}$ - $m \times 1$ matrica. Horizontāli savienosim tās $m \times (n+1)$ matricā $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

1.2.3. Transponēšana.

Dažās situācijās ir lietderīgi apskatīt matricas simetriju attiecībā uz galveno diagonāli. Par $m \times n$ matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ *transponēto matricu* sauksim $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n,m}$.

Piemērs 1.21. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c}-2 & 1 & 1\\ \hline 3 & 2 & -1\end{array}\right], \mathbf{A}^T = \left[\begin{array}{c|c}-2 & 3\\ \hline 1 & 2\\ \hline 1 & -1\end{array}\right].$

Divas reizes pielietojot transponēšanas operāciju, iegūst sākotnējo matricu: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Matrica $\mathbf{A}$ ir *simetriska matrica* $\iff$ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Matrica $\mathbf{A}$ ir *antisimetriska matrica* $\iff$ $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

1.2.4. Kompleksā (Ermita) transponēšana.

Par $m \times n$ matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} \in \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{C})$ *kompleksi transponēto (saistīto) matricu* sauksim $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^H = [\overline{a_{ji}}]_{n,m}$.

Piemērs 1.22. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c}0 & i\\ \hline -i & 0\end{array}\right] = \mathbf{A}^H.$

Redzam, ka $(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$.

Matrica $\mathbf{A}$ ir *Ermita matrica* $\iff$ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$. Matrica $\mathbf{A}$ ir *anti-Ermita matrica* $\iff$ $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^H$.

1.2.5. Lineārās operācijas.

Vienādu izmēru matricu kopā var definēt operācijas, kas vispārina skaitļu saskaitīšanu un reizināšanu.

1.2.5.1. *Matricu summa.* Par divu vienāda izmēra matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ un $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m,n}$ summu sauksim matricu

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}.$$

Citiem vārdiem sakot, saskaitot divas vienāda izmēra matricas, tiek saskaitīti elementi, kuriem ir vienādas adreses:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \hline a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{array}\right].$$

1.2.5.2. *Matricas reizināšana ar skaitli.* Par matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ reizinājumu ar gredzena elementu λ sauksim matricu

$$\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]_{m,n}.$$

Citiem vārdiem sakot, reizinot matricu ar kādu skaitli, visi tās elementi tiek reizināti ar šo skaitli:

$$\lambda \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \hline \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{array}\right].$$

Matricu $(-1)\mathbf{A}$ parasti apzīmē ar $-\mathbf{A}$.

Piemērs 1.23. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $3 \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1/3 \\ \hline 4 & 4 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 9 & -3 & 6 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline 12 & 12 & -6 \end{array}\right]$.

1.2.5.3. *Matricu lineāra kombinācija.* Ja ir dotas vairākas vienāda izmēra matricas $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_l$ un gredzena elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ (*koeficienti*), tad izteiksmi

$$\lambda_1\mathbf{A}_1 + \ldots + \lambda_l\mathbf{A}_l = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\mathbf{A}_i$$

sauc par doto matricu *lineāru kombināciju*. Lineāro kombināciju $1\cdot\mathbf{A}+(-1)\cdot\mathbf{B}$ apzīmē ar $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ un sauksim par matricu starpību.

Piemērs 1.24. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$, $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} -4 & 8 & 8 \\ \hline 9 & 1 & -5 \end{array}\right]$.

Katra matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ ir viennozīmīgi izsakāma bāzes matricu lineāras kombinācijas veidā:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}.$$

Teorēma 1.25. *$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ - vienādu izmēru matricas.*
(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ *(komutativitāte).*
(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ *(asociativitāte).*
(3) *katrai matricai* $\boldsymbol{A}$ *eksistē viennozīmīgi noteikta matrica* $\boldsymbol{Z}:\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}$.
(4) *katrai matricai* $\boldsymbol{A}$ *eksistē viennozīmīgi noteikta matrica* $\boldsymbol{A}':\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{0}$.
(5) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.
(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.
(7) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$.
(8) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$.
(9) $(\lambda\boldsymbol{A})^T = \lambda\boldsymbol{A}^T$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

3. $\mathbf{Z}=\mathbf{0}$.

4. $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$.

5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=[\lambda(a_{ij}+b_{ij})]=[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}]=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$.

6. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=[(\lambda+\mu)a_{ij}]=[\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}]=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$.

7. $(\lambda\mu)\mathbf{A}=[(\lambda\mu)a_{ij}]=[\lambda(\mu a_{ij})]=\lambda(\mu\mathbf{A})$.

8. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=[a_{ji}+b_{ji}]=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$.

9. $(\lambda\mathbf{A})^T=[\lambda a_{ji}]=\lambda\mathbf{A}^T$. ■

1.2.6. Matricu reizināšana.

Matricu kopā var definēt *matricu reizināšanu*, kas

- vispārina skaitļu reizināšanu,
- atbilst funkciju kompozīcijai (matrica $\leftrightarrow$ funkcija, tas tiks pamatots nākamajās sadaļās).

1.2.6.1. *Rindas un kolonnas reizināšana.* Par rindas $\mathbf{r}=[a_1|...|a_n]$ reizinājumu ar kolonnu $\mathbf{k}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \hline ... \\ \hline b_n \end{bmatrix}$ sauc lauka elementu $\mathbf{rk}=a_1b_1+...+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. Rindas un kolonnas reizinājums ir definēts tad un tikai tad, ja tām ir vienāds garums.

PIEMĒRS 1.26. $[2|3|-1]\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ \hline 1 \\ \hline -3 \end{bmatrix}=2\cdot 4+3\cdot 1+(-1)\cdot(-3)=14.$

1.2.6.2. *Matricas un kolonnas reizināšana.* Par $m\times n$ matricas $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$ reizinājumu ar $n\times 1$ kolonnas matricu $\mathbf{b}$ sauksim $m\times 1$ kolonnas matricu $\mathbf{Ab}=[\mathbf{r}_i\mathbf{b}]_{m,1}$.

1.2.6.3. *Vispārīgais gadījums.* Par $m\times n$ matricas $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$ reizinājumu ar $n\times r$ matricu $\mathbf{B}=[\mathbf{k}_1|...|\mathbf{k}_r]$ sauksim $m\times r$ matricu $\mathbf{AB}=[\mathbf{r}_i\mathbf{k}_j]_{m,r}$,

Citiem vārdiem sakot, ja $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m,n}$ un $\mathbf{B}=[b_{ij}]_{n,r}$, tad $\mathbf{AB}=[x_{ij}]_{m,r}$, kur

$$x_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{12}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}.$$

Matricu reizinājums ir operācija, kas ir definēta tikai noteiktos gadījumos, atkarībā no matricu izmēriem. Matricu reizinājums $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ir definēts tad un tikai tad, ja $\mathbf{A}$ kolonnu skaits ir vienāds ar $\mathbf{B}$ rindu skaitu.

Ir iespējama matricu reizinājuma vizualizācija trīs matricu stūra veidā - reizinājums ir vidējā matrica, kuras elementi tiek iegūti kā reizinātāju rindu un kolonnu reizinājumi:

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r}\\ \dots&\dots&\dots\dots&\dots&\dots\\ b_{n1}&\dots&b_{nj}&\dots&b_{nr}\end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ \hline a_{i1}&\dots&a_{in}\\ \hline \dots&\dots&\dots\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc|c|cc} x_{11}&..&x_{1j}&..&x_{1r}\\ \dots&..&..&..&\dots\\ \hline x_{i1}&..&x_{ij}&..&x_{ir}\\ \hline \dots&..&\dots&..&\dots\\ x_{m1}&..&x_{mj}&..&x_{mr}\end{array}\right]\end{array}$$

Matricu stūris ir ērta skaitļošanas metode matricu reizināšanai. Reizinājuma $\mathbf{AB}$ izmēri ir vienādi ar apakšējā labā bloka izmēriem, reizinājums ir definēts, ja augšējais kreisais bloks ir kvadrāts.

PIEMĒRS 1.27. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right]$, $\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} -3 & 8 \\ \hline -4 & 15 \end{array}\right]$.

PIEZĪME 1.28. Aprakstīto bloku matricu ar blokiem $\mathbf{A}$ un $\mathbf{B}$ var izmantot arī reizinājuma $\mathbf{BA}$ atrašanai - tam atbilst augšējais kreisais bloks.

PIEZĪME 1.29. $\mathbf{A} = [a_{11}], \mathbf{B} = [b_{11}] \implies \mathbf{AB} = [a_{11}b_{11}]$ - tādējādi matricu reizināšana vispārina skaitļu reizināšanu.

Ja $\mathbf{A}$ - kvadrātveida matrica, tad definēsim

$$\begin{cases} \mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n, \\ \mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}}_{p \text{ reizes}} = \mathbf{A}^{p-1}\cdot\mathbf{A}. \end{cases}$$

Kvadrātveida matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{B}$ sauc par *komutējošām*, ja $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

1.2.6.4. *Īpašības.*

TEORĒMA 1.30.
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ - matricas, λ - koeficientu lauka elements. Ja ir definēti visi dotie matricu reizinājumi, tad

(1) $\lambda(\boldsymbol{AB}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.
(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ *(kreisā distributivitāte).*
(3) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$ *(labā distributivitāte).*
(4) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ *(asociativitāte).*
(5) $\boldsymbol{A}^u\boldsymbol{A}^v = \boldsymbol{A}^{u+v}$, *kur $\boldsymbol{A}$ - kvadrātveida matrica, u un v - naturāli skaitļi.*
(6) $(\boldsymbol{A}^u)^v = \boldsymbol{A}^{uv}$, *kur $\boldsymbol{A}$ - kvadrātveida matrica, u un v - naturāli skaitļi.*
(7) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$, $(\boldsymbol{AB})^H = \boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H$.
(8) $\boldsymbol{A0} = \boldsymbol{0A} = \boldsymbol{0}$.
(9) $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$.
(10) *eksistē matricas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.*

PIERĀDĪJUMS
1. $\lambda(\mathbf{AB}) = \left[\lambda \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right] = \underbrace{\left[\sum\limits_{l=1}^{n}\Big(\lambda a_{il}\Big)b_{lj}\right]}_{=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}} = \underbrace{\left[\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}(\lambda b_{lj})\right]}_{=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})}$.

2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}(b_{lj}+c_{lj})\right] = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}c_{lj}\right] = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

3. Līdzīgi 2.

4. Pieņemsim, ka $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [a_{ij}]_{n,r}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{r,s}$. Tad

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right]_{m,r}, (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \left[\sum_{u=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lu}\right)c_{uj}\right]_{m,s} = \left[\sum_{u,l} a_{il}b_{lu}c_{uj}\right]_{m,s},$$

$$\mathbf{BC} = \left[\sum_{u=1}^{r} b_{iu}c_{uj}\right]_{n,s}, \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{u=1}^{r} b_{lu}c_{uj}\right)\right]_{m,s} = \left[\sum_{u,l} a_{il}b_{lu}c_{uj}\right]_{m,s}.$$

5. Seko no asociativitātes:

$$\mathbf{A}^u\mathbf{A}^v = \underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{u \text{ reizes}}\underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{v \text{ reizes}} = \underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{u+v \text{ reizes}} = \mathbf{A}^{u+v}.$$

6. Seko no asociativitātes:

$$(\mathbf{A}^u)^v = \underbrace{\underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{u \text{ reizes}}\cdots\underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{u \text{ reizes}}}_{v \text{ reizes}} = \underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{uv \text{ reizes}} = \mathbf{A}^{uv}.$$

7. Apzīmēsim $\mathbf{A}^T = [a_{ji}] = [a^T_{ij}]$, $\mathbf{B}^T = [b_{ji}] = [b^T_{ij}]$. Tad

$$(\mathbf{AB})^T = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right]^T = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{li}\right] = \left[\sum_{l=1}^{n} b_{li}a_{jl}\right] = \left[\sum_{l=1}^{n} b^T_{il}a^T_{lj}\right] = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

8. Katram matricu reizinājuma elementam visi saskaitāmie ir 0.

9. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} \implies \mathbf{AE}_n = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\delta_{lj}\right] = \underbrace{[a_{ij}]}_{l=j}, \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \left[\sum_{l=1}^{n} \delta_{il}a_{lj}\right] = \underbrace{[a_{ij}]}_{l=i}.$

10. Ja $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, tad $\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $\mathbf{BA} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$. ■

Teorēma 1.31.

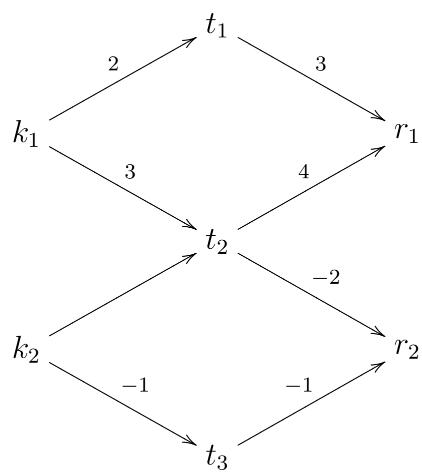
(1) $\boldsymbol{ZA} = \boldsymbol{0}_{r,n}$ *katrai* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k) \iff \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}_{r,m}$.
(2) $\boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{0}_{m,r}$ *katrai* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k) \iff \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}_{n,r}$.
(3) $\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$ *katrai* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k) \iff \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_m$.
(4) $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{A}$ *katrai* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k) \iff \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n$.

PIERĀDĪJUMS Implikācijas $\Longleftarrow$ visos gadījumos tiek pierādītas ar tiešu pārbaudi. Implikācijas $\Longrightarrow$ visos gadījumos tiek pierādītas, izvēloties par $\mathbf{A}$ visas iespējamās bāzes matricas $\mathbf{E}_{ij}$.■

1.2.6.5. *Grafiskā interpretācija.*

Matricām $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ un $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,r}$ konstruēsim to grafus: $\Gamma_{\mathbf{A}}$ ar virsotņu kopu $R_{\mathbf{A}} \cup K_{\mathbf{A}}$ un $\Gamma_{\mathbf{B}}$ ar virsotņu kopu $R_{\mathbf{B}} \cup K_{\mathbf{B}}$. Konstruēsim jaunu grafu $\Gamma_{\mathbf{AB}}$ identificējot $K_{\mathbf{A}}$ ar $R_{\mathbf{B}}$.

PIEMĒRS 1.32. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$. $\Gamma_{\mathbf{AB}}$ ir šāds:



Virsotnes t_1, t_2, t_3 atbilst identificētajām virsotnēm.

Apskatīsim orientētus maršrutus grafā $\Gamma_{\mathbf{AB}}$ no kopas $K_{\mathbf{B}} = \{k_1, ..., k_r\}$ virsotnēm uz kopas $R_{\mathbf{A}} = \{r_1, ..., r_m\}$ virsotnēm, katram šādam maršrutam atradīsim tā šķautņu svaru reizinājumu. Var pārliecināties, ka matricas $\mathbf{AB} = [c_{ij}]_{m,r}$ elements c_{ij} ir vienāds ar visu orientēto maršrutu no k_j uz r_i šķautņu svaru reizinājumu summu.

1.2.6.6. *Bloku matricu reizināšana.*

Matricu reizinājumu var interpretēt izmantojot to rindu un kolonnu reizinājumus.

TEORĒMA 1.33.

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{k}_1|...|\boldsymbol{k}_n] \in \mathcal{M}at(m,n,k),\ \boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(n,1,k),\ \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{p}_1|...|\boldsymbol{p}_r] \in \mathcal{M}at(n,r,k)$$

kur $\boldsymbol{p}_j = \left[\begin{array}{c} p_{1j} \\ \hline ... \\ \hline p_{nj} \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(n,1,k)$,

(1) $\boldsymbol{Ax} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{k}_j$.

(2) $\boldsymbol{AB} = \left[\sum\limits_{j=1}^{n} p_{j1}\boldsymbol{k}_j | ... | \sum\limits_{j=1}^{n} p_{jr}\boldsymbol{k}_j\right]$

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude.■

Ja matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ un $B = [b_{ij}]_{n,r}$ ir sadalītas blokos tā, ka $\mathbf{A}$ kolonnu dalījums sakrīt ar $\mathbf{B}$ rindu dalījumu, tad $\mathbf{AB}$ var aprēķināt izmantojot bloku matricu reizinājumus.

TEORĒMA 1.34. *$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m,n} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \dots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \boldsymbol{A}_{r1} & \dots & \boldsymbol{A}_{rl} \end{array}\right]$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n,r} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{B}_{11} & \dots & \boldsymbol{B}_{1s} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \boldsymbol{B}_{l1} & \dots & \boldsymbol{B}_{ls} \end{array}\right]$, kur katra bloka $\boldsymbol{A}_{1i}$ kolonnu skaits ir vienāds ar bloka $\boldsymbol{B}_{i1}$ rindu skaitu, tad*

$$\boldsymbol{AB} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{1s} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \boldsymbol{C}_{r1} & \dots & \boldsymbol{C}_{rs} \end{array}\right], \text{ kur } \boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{q=1}^{l} \boldsymbol{A}_{iq}\boldsymbol{B}_{qj}.$$

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude.■

PIEMĒRS 1.35. $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{11}|\dots|\mathbf{B}_{1s}] \implies \mathbf{AB} = [\mathbf{AB}_{11}|\dots|\mathbf{AB}_{1s}]$.

1.2.6.7. *Speciāla veida matricu operāciju īpašības.*

TEORĒMA 1.36.

(1) *Divu vienāda izmēra kvadrātveida diagonālu matricu summa un reizinājums ir diagonāla matrica.*
(2) *Divu vienāda izmēra kvadrātveida augšēji (apakšēji) trijstūrveida matricu summa un reizinājums ir augšēji (apakšēji) trijstūrveida matrica.*

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude.■

1.2.7. Matricu invertēšana.

$n \times n$ matricu $\mathbf{A}$ sauksim par *invertējamu*, ja eksistē $n \times n$ *inversā matrica* $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

PIEMĒRS 1.37. $\mathbf{E}_n^{-1} = \mathbf{E}_n$, $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{c|c} 5 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1/5 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -3 & 1 \end{array}\right]$.

1.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 1.38. Atrodiet matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3,4}$ elementus, ja $a_{ij} = (-1)^{i+j} - ij$.

VINGRINĀJUMS 1.39. Atrisiniet matricu vienādojumus vai vienādojumu sistēmas:

(1) $\mathbf{X} + \mathbf{A} = 2(\mathbf{X} - \mathbf{B})$, kur $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$;
(2) $\begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \mathbf{0}_{2,2}. \end{cases}$

VINGRINĀJUMS 1.40. Atrodiet matricu lineārās kombinācijas:

(1) $3 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 4 & -1 \end{array}\right] - 2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline -2 & 4 \end{array}\right]^T$;
(2) $\sum_{i,j=1}^{3} (-1)^{i+j}\mathbf{E}_{ij}$ (3×3 matrica).

VINGRINĀJUMS 1.41. $\mathbf{A}$ ir kvadrātveida reāla vai kompleksa matrica. Pierādīt šādus apgalvojumus:

(1) visām kompleksām matricām $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ un $\mathbf{AA}^H$ ir Ermita matricas,
(2) $\mathbf{A}$ ir Ermita matrica tad un tikai tad, ja $i\mathbf{A}$ ir anti-Ermita matrica.

VINGRINĀJUMS 1.42. Atrodiet matricu reizinājumus:

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 1 & b \\ \hline a & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} c & 1 \\ \hline 1 & d \end{array}\right]$,

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & a & b \\ \hline -a & 0 & c \\ \hline -b & -c & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 0 & 4 \\ \hline -3 & -4 & 0 \end{array}\right]$,

(3) $\mathbf{AB}$ un $\mathbf{BA}$, kur $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \end{array}\right]$.

Vingrinājums 1.43. Atrodiet matricu pakāpes $\mathbf{A}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

(1) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 1 & a \end{array}\right]$,

(2) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

Vingrinājums 1.44. Izpētiet, kāds efekts ir matricas reizināšanai no labās un kreisās puses ar bāzes matricu $\mathbf{E}_{ij}$.

Vingrinājums 1.45. Matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{B}$ ir komutējošas - $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Pierādīt, ka

(1) matricas $\mathbf{A}^m$ un $\mathbf{B}^n$ ir komutējošas $\forall$ naturāliem m un n,

(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^m = \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i \mathbf{A}^i \mathbf{B}^{m-i}$, kur $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$,

(3) atrodiet nekomutējošu matricu piemērus, kurām neizpildās iepriekšējā punkta vienādība.

Vingrinājums 1.46. Vienāda izmēra kvadrātveida matricām $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ definēsim $[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = \mathbf{XY} - \mathbf{YX}$. Pierādīt identitāti

$$[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}] + [[\mathbf{B},\mathbf{C}],\mathbf{A}] + [[\mathbf{C},\mathbf{A}],\mathbf{B}] = \mathbf{0}.$$

Vingrinājums 1.47. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ - kvadrātveida matricas, $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{E}$. Pierādīt, ka $[\mathbf{A}^m,\mathbf{B}] = m\mathbf{A}^{m-1}$, $m \geq 2$.

Vingrinājums 1.48. $\mathbf{A}$ - kvadrātveida $n \times n$ matrica.

(1) Visiem i,j izpildās $\mathbf{AE}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$. Pierādīt, ka $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{E}_n$.

(2) Visiem i izpildās $\mathbf{AE}_{ii} = \mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$. Pierādīt, ka $\mathbf{A}$ ir diagonāla matrica.

Vingrinājums 1.49. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(2,\mathbb{R})$, kuras apmierina matricu vienādojumu $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_2$.

Vingrinājums 1.50. Pierādīt, ka

(1) $\forall\, \mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ var viennozīmīgi izteikt formā

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{sim} + \mathbf{A}_{asim},$$

kur $\mathbf{A}_{sim}$ ir simetriska matrica un $\mathbf{A}_{asim}$ ir antisimetriska matrica,

(2) $\forall\, \mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,\mathbb{C})$ var viennozīmīgi izteikt formā

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_H + \mathbf{A}_{aH},$$

kur $\mathbf{A}_H$ ir Ermita matrica un $\mathbf{A}_{aH}$ ir anti-Ermita matrica,

Vingrinājums 1.51. Interpretēt vienkāršākās matricu operācijas (rindu un kolonnu izsvītrošanu, transponēšanu, reizināšanu ar skaitli, saskaitīšanu, lineārās kombinācijas) izmantojot matricu reizināšanu.

2. NODAĻA

Lineāru vienādojumu sistēmas

2.1. Ievads

2.1.1. Definīcijas un apzīmējumi.

k - lauks (piemēram, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$). Par *lineāru vienādojumu* attiecībā uz *nezināmajiem* $X_1, X_2, ..., X_n$ laukā k sauksim vienādojumu

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = b, \text{ kur } a_1, ..., a_n, b \in k.$$

Lineāru vienādojumu var atrisināt šādā veidā: $\exists\ a_p \neq 0 \implies$

$$X_p = \frac{1}{a_p}\Big(b - a_1X_1 - ... - a_{p-1}X_{p-1} - a_{p+1}X_{p+1} - ... - a_nX_n\Big).$$

Nezināmo $X_1, ..., X_{p-1}, X_{p+1}, ..., X_n$ vērtības var izvēlēties patvaļīgi.

Vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + & a_{12}X_2 + & ... + & a_{1n}X_n & = b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1 + & a_{m2}X_2 + & ... + & a_{mn}X_n & = b_m \end{cases}$$

attiecībā uz nezināmajiem $X_1, ..., X_n$ sauksim par *lineāru vienādojumu sistēmu (LVS).*

Piemērs 2.1. $\begin{cases} X_1 + & X_2 + & X_3 & = 0 \\ X_1 + & 2X_2 & & = 3 \\ & -X_2 + & 4X_3 & = 2 \end{cases}$ ir LVS. $\begin{cases} X_1^2 + & X_2^2 & = 1 \\ X_1 + & 2X_2 & = 1 \end{cases}$ nav LVS.

LVS tiek plaši izmantotas matemātikā, dabaszinātnēs un inženierzinātnēs.

2.1.2. LVS pieraksta veidi.

2.1.2.1. *LVS vispārīgais pieraksts.*

Par LVS *vispārīgo pierakstu* sauc sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + & a_{12}X_2 + & ... + & a_{1n}X_n & = b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1 + & a_{m2}X_2 + & ... + & a_{mn}X_n & = b_m \end{cases}$$

kur

- X_j - *nezināmie,*
- a_{ij} - *koeficienti,*
- b_i - *brīvie locekļi.*

Ja $b_i = 0,\ \forall\ i$, tad LVS sauc par *homogēnu LVS.* Ja $n = m$, tad LVS sauc par *kvadrātveida LVS.* Ja nezināmo skaits ir neliels, tad tos var apzīmēt burtiem no alfabēta beigām bez indeksiem - X,Y,Z u.c., kurus matemātikā tradicionāli izmanto nezināmo lielumu apzīmēšanai.

2.1.2.2. *LVS matricu pieraksts.*

$\forall$ LVS sistēmai

$$\begin{cases} a_{11}X_1+ & a_{12}X_2+ & ...+ & a_{1n}X_n & = b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1+ & a_{m2}X_2+ & ...+ & a_{mn}X_n & = b_m \end{cases}$$

definēsim 3 matricas:

- *sistēmas matrica* ir $m \times n$ matrica:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & ... & a_{mn} \end{array} \right],$$

- *nezināmo kolonnas matrica*

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline ... \\ \hline X_n \end{array} \right],$$

- *brīvo locekļu kolonnas matrica*

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline ... \\ \hline b_m \end{array} \right].$$

LVS ir līdzvērtīga *LVS matricu vienādojumam*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Piezīme 2.2. Izmantojot transponēšanas operāciju var iegūt līdzvērtīgu matricu vienādojumu

$$(\mathbf{Ax})^T = \boxed{\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{b}^T,}$$

kurā nezināmie un brīvie locekļi ir rindu matricas.

2.1.2.3. *LVS paplašinātās matricas pieraksts.*

LVS L

$$\begin{cases} a_{11}X_1+ & a_{12}X_2+ & ...+ & a_{1n}X_n & = b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1+ & a_{m2}X_2+ & ...+ & a_{mn}X_n & = b_m \end{cases}$$

paplašinātā matrica $\mathbf{L}$ ir $m \times (n+1)$ matrica

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array} \right] = [\mathbf{A}|\mathbf{b}].$$

Piemērs 2.3. Sistēmai

$$\begin{cases} X_1+ & X_2+ & X_3 & = 0 \\ X_1+ & 2X_2 & & = 3 \\ & -X_2+ & 4X_3 & = 2 \end{cases}$$

atbilst paplašinātā matrica $\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right].$

2.1.2.4. *LVS kolonnu pieraksts (kolonnu aina).*
Par LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *kolonnu pierakstu* sauc tai līdzvērtīgo kolonnu matricu vienādību

$$X_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \hline ... \\ \hline a_{m1} \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \hline ... \\ \hline a_{m2} \end{bmatrix} + ... + X_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \hline ... \\ \hline a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Piemērs 2.4. Sistēmai

$$\begin{cases} X_1+ & X_2+ & X_3 & = 0 \\ X_1+ & 2X_2 & & = 3 \\ & -X_2+ & 4X_3 & = -2 \end{cases}$$

atbilst kolonnu pieraksts

$$X_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 2 \\ \hline -1 \end{bmatrix} + X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 3 \\ \hline -2 \end{bmatrix}.$$

2.1.3. LVS atrisinājumi. Par LVS

$$\begin{cases} a_{11}X_1+ & a_{12}X_2+ & ...+ & a_{1n}X_n & = b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1+ & a_{m2}X_2+ & ...+ & a_{mn}X_n & = b_m \end{cases}$$

atrisinājumu sauksim tādu lauka elementu virkni $(x_1^0, ..., x_n^0)$, ka, ievietojot X_i vietā x_i^0, $\forall\, i$, katra sistēmas vienādojuma vietā iegūst lauka elementu vienādību. Atrisināt LVS nozīmē atrast tās *atrisinājumu kopu* - atrast visus atrisinājumus. LVS sauksim par *saderīgu*, ja tai eksistē vismaz viens atrisinājums - atrisinājumu kopa nav tukša.

Piemērs 2.5. Homogēna LVS virs jebkura lauka ir saderīga - tai ir *triviālais atrisinājums* $(0, ..., 0)$.

Sistēmai $\begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}$ atrisinājumu kopa laukā $\mathbb{R}$ satur vienu skaitļu pāri $(1, 0)$.

Sistēmai $\begin{cases} X + Y = 1 \\ X + Y = 0 \end{cases}$ atrisinājumu kopa jebkurā laukā ir tukša - nekāds lauka elementu pāris (x^0, y^0) neapmierina šo sistēmu.

Sistēmai $\begin{cases} X + Y = 1 \\ 2X + 2Y = 2 \end{cases}$ laukā $\mathbb{R}$ atrisinājumu kopa ir bezgalīga - visi skaitļu pāri formā $(c, 1 - c)$, kur $c \in \mathbb{R}$, apmierina šo sistēmu.

Divas LVS sauc par ekvivalentām, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas (tās var būt arī tukšas).

Piemērs 2.6. Sistēmas $\begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}$ un $\begin{cases} X + Y = 1 \\ 2X = 2 \end{cases}$ laukā $\mathbb{R}$ ir ekvivalentas - tām abām atrisinājumu kopa ir skaitļu pāris $(1, 0)$.

LVS pētīšanas pamatuzdevums - LVS risināšana un to atrisinājumu kopu aprakstīšana. Viena no LVS risināšanas metodēm - dotās LVS pārveidošana uz ērtāku ekvivalentu sistēmu, veicot vienkāršus soļus, piemēram, *nezināmo izslēgšanu*, kas nemaina atrisinājumu kopu.

2.2. LVS elementārie pārveidojumi

Aprakstīsim vairāku tipu LVS *elementāros pārveidojumus (EP)*, kas nemaina LVS atrisinājumu kopu. LVS elementārajiem pārveidojumiem piekārtosim matricu *rindu elementāros pārveidojumus (REP)*.

2.2.1. 1.veida elementārie pārveidojumi.

LVS *1.veida EP (REP1)* R_{pq} - p-tā un q-tā vienādojuma apmaiņa:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \to \begin{cases} ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \end{cases}$$

Šāda pārveidojuma rezultātā mainās abi vienādojumi. Paplašinātās matricas pierakstā vai matricu vienādojumā REP1 nozīmē divu matricas rindu apmaiņu.

Par REP1 R_{pq} *elementāro matricu* $\mathbf{R}_{pq}$ sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot R_{pq} vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_{pq} = \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_{pp} - \mathbf{E}_{qq} + \mathbf{E}_{pq} + \mathbf{E}_{qp}.$$

Piemērs 2.7. $\mathbf{R}_{12} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2.2.2. 2.veida elementārie pārveidojumi.

LVS *2.veida EP (REP2)* $R_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tā vienādojuma koeficientu reizināšana ar λ:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \end{cases} \to \begin{cases} ... \\ (\lambda a_{p1})X_1 + ... + (\lambda a_{pn})X_n = \lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

Šāda pārveidojuma rezultātā mainās p-tais vienādojums. Paplašinātajā matricā vai matricu vienādojumā REP2 nozīmē visu p-tās rindas elementu reizināšanu ar λ.

Par REP2 $R_p(\lambda)$ *elementāro matricu* $\mathbf{R}_p(\lambda)$ sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot $R_p(\lambda)$ vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_p(\lambda) = \mathbf{E}_m + (\lambda - 1)\mathbf{E}_{pp}.$$

Piemērs 2.8. $\mathbf{R}_2(-3) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2.2.3. 3.veida elementārie pārveidojumi.

LVS *3.veida EP (REP3)* $R_{pq}(\lambda)(p \neq q)$ - p-tā vienādojuma, reizināta ar λ, pieskaitīšana q-tajam vienādojumam:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \to \begin{cases} \begin{array}{cccc} ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}X_1 & +... & +a_{pn}X_n & = b_p \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 & +... & +(a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n & = b_q + \lambda b_p \\ ... & & & \end{array} \end{cases}$$

Šāda pārveidojuma rezultātā mainās tikai q-tais vienādojums. Paplašinātās matricas un matricu pierakstā REP3 nozīmē p-tās rindas elementu reizināšanu ar fiksētu skaitli un rezultāta pieskaitīšana q-tajai rindai.

Par REP3 $R_{pq}(\lambda)$ *elementāro matricu* $\mathbf{R}_{pq}(\lambda)$ sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot $R_{pq}(\lambda)$ vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_{pq}(\lambda) = \mathbf{E}_m + \lambda\mathbf{E}_{qp}.$$

Piemērs 2.9. $\mathbf{R}_{12}(-3) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2.2.4. Citi LVS pārveidojumi.

2.2.4.1. *Triviālo vienādojumu ignorēšana.*

Vienādojumu $0 \cdot X_1 + ... + 0 \cdot X_n = 0$, kuram atbilst paplašinātās matricas nuļļu rinda $[0|...|0]$, sauksim par *triviālu vienādojumu*. Triviālos vienādojumus var ignorēt.

2.2.4.2. *Seku vienādojumu pievienošana.*

Vairāku vienādojumu lineāru kombināciju sauksim par *seku vienādojumu*. Seku vienādojumus ir vairāku REP1, REP2 un REP3 rezultāts. Ja skaitļu virkne apmierina LVS, tad tā apmierina arī jebkuru seku vienādojumu $\Longrightarrow$ jebkuru seku vienādojumu pievienošana nemaina LVS atrisinājumu kopu.

2.2.5. Elementāro pārveidojumu īpašības un realizācija ar matricu reizināšanu.

TEORĒMA 2.10.

(1) $\forall$ *EP R saglabā LVS atrisinājumu kopu.*

(2) *EP R ar elementāro matricu* $\boldsymbol{R}$ *atbilst paplašināto matricu pārveidojumam*

$$\boldsymbol{L} \to \boldsymbol{RL}.$$

(3) *visi EP ir invertējami attēlojumi LVS kopā:*

$$\begin{cases} R_{pq}^{-1} = R_{pq}, \\ R_p(\lambda)^{-1} = R_p(\lambda^{-1}), \\ R_{pq}(\lambda)^{-1} = R_{pq}(-\lambda). \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

1. R_{pq} nemaina LVS atrisinājumu kopu, jo LVS vienādojumu kopa nemainās. $R_p(\lambda)$ nemaina LVS atrisinājumu kopu, jo viens LVS vienādojums tiek reizināts ar $\lambda \neq 0$.

Apskatīsim $R_{pq}(\lambda)$. Ja lauka elementu virkne $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases}$$

tad

$$(a_{q1} + \lambda a_{p1})x_1^0 + ... + (a_{qn} + \lambda a_{pn})x_n^0 = b_q + \lambda b_p,$$

tātad $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina arī sistēmu

$$\begin{cases} \begin{array}{cccc} ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}X_1 & +... & +a_{pn}X_n & = b_p \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 & +... & +(a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n & = b_q + \lambda b_p \\ ... & & & \end{array} \end{cases}$$

Ja virkne $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} \begin{array}{cccc} ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}X_1 & +... & +a_{pn}X_n & = b_p \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 & +... & +(a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n & = b_q + \lambda b_p \\ ... & & & \end{array} \end{cases}$$

tad tā apmierina arī sistēmu, ko iegūst, veicot $R_{pq}(-\lambda)$ -

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases}$$

2. Ar tiešu pārbaudi katram EP R pārliecināsimies, ka pārveidotās LVS paplašinātā matrica ir $\mathbf{RL}$. Kā piemēru apskatīsim tikai REP3 $R_{pq}(\lambda)$:

$$\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{L} = (\mathbf{E}_m + \lambda\mathbf{E}_{qp})\mathbf{L} = \mathbf{E}_m\mathbf{L} + \lambda\mathbf{E}_{qp}\mathbf{L} = \mathbf{L} + \lambda\mathbf{E}_{qp}\mathbf{L} = \mathbf{L} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_p(q\text{-tā rinda}) \\ \hline \mathbf{0}... \end{bmatrix}$$

3. Pielietojot R_{pq} divas reizes, iegūsim sākotnējo LVS. Pielietojot EP virkni $R_p(\lambda), R_p(\lambda^{-1})$ norādītajā secībā, iegūsim sākotnējo LVS. Pielietojot EP virkni $R_{pq}(\lambda), R_{pq}(-\lambda)$, iegūsim sākotnējo LVS. ■

2.2.6. Elementāro pārveidojumu virknes.

TEORĒMA 2.11.
Ja LVS $\boldsymbol{L}_2$ ir iegūta no LVS $\boldsymbol{L}_1$ pielietojot galīgu EP virkni $R_1, ..., R_l$ norādītajā secībā, tad

(1) *$\boldsymbol{L}_1$ un $\boldsymbol{L}_2$ ir ekvivalentas,*
(2) *$\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{R}_l \cdot ... \cdot \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{L}_1$.*
(3) *Matrica $\boldsymbol{R}_l \cdot ... \cdot \boldsymbol{R}_1$ ir vienāda ar EP virknes $R_1, ..., R_l$ pielietošanu vienības matricai.*

PIERĀDĪJUMS
1. $\forall$ EP saglabā LVS atrisinājumu kopu $\Longrightarrow$ veicot pēctecīgi vairākus EP, atrisinājumu kopa arī tiks saglabāta.

2. Katrs nākamais EP R_i tiek pielietots iepriekšējo pārveidojumu kompozīcijai $\mathbf{R}_{i-1} \cdot ... \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{L}_1$, tāpēc pēc tā pielietošanas tiks iegūta matrica

$$\mathbf{R}_i \cdot (\mathbf{R}_{i-1} ... \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{L}_1) = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_{i-1} ... \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{L}_1.$$

Pieņemot $i = l$ iegūsim pierādāmo apgalvojumu.

3. $\mathbf{R}_l \cdot ... \cdot \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_l \cdot ... \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{E}$. ■

PIEZĪME 2.12. $\mathbf{R}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = [\mathbf{RA}|\mathbf{Rb}]$ $\Longrightarrow$ ja LVS ir uzdota matricu veidā $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tad EP matricas reizina abās pusēs:

$$\Big(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\Big) \to \Big((\mathbf{RA})\mathbf{x} = \mathbf{Rb}\Big).$$

PIEZĪME 2.13. Ja ar $m \times n$ matricu $\mathbf{A}$ tiek veikta REP virkne $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$, tad rezultējošo pārveidojuma matricu $\mathbf{R} = \mathbf{R}_l ... \mathbf{R}_1$ var ērti aprēķināt šādā veidā:

(1) definēt bloku matricu $[\mathbf{E}_n|\mathbf{A}]$,
(2) veikt REP ar matricām $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$, rezultātā tiks iegūta matrica $[\mathbf{R}|\mathbf{RA}]$.

2.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 2.14. Aprakstiet LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ja tās sistēmas matrica $\mathbf{A}$ ir

(1) rindas matrica,
(2) kolonnas matrica,
(3) kvadrātveida matrica,
(4) nulles matrica,
(5) vienības matrica,
(6) diagonāla matrica,
(7) augšēji trijstūrveida matrica.

VINGRINĀJUMS 2.15. Dotajām LVS un elementāro pārveidojumu virknēm atrast pārveidoto paplašināto matricu, pārveidoto sistēmu un pārveidojuma matricu.

(1) LVS:
$$\begin{cases} X_1 & +2X_2 & -2X_3 & -7X_4 & = -8 \\ 3X_1 & +6X_2 & -4X_3 & -11X_4 & = -12 \\ -2X_1 & -4X_2 & +3X_3 & +9X_4 & = 13. \end{cases}$$
EP virkne: $R_{12}(-3)$, $R_{13}(2)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(1)$, $R_3(1/3)$, $R_{21}(2)$ (sākot no kreisās puses).

(2) LVS:
$$\begin{cases} X_1 & +2X_2 & & -5X_4 & = 3 \\ 2X_1 & +4X_2 & -3X_3 & -16X_4 & = -6 \\ 3X_1 & +4X_2 & -2X_3 & -13X_4 & = -3. \end{cases}$$
EP virkne: $R_{12}(-2)$, $R_{13}(-3)$, R_{23}, $R_2(-1/2)$, $R_3(-1/3)$, $R_{21}(-2)$, $R_{32}(-1)$, $R_{31}(2)$.

VINGRINĀJUMS 2.16. Aprakstīt LVS rindu pārveidojumus, kas atbilst paplašinātās matricas reizināšanai no kreisās puses ar dotajām matricām.

(1) $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & 0 \end{array}\right]$

(3) $\left[\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 1 & a \end{array}\right]$

VINGRINĀJUMS 2.17. Izmantojot elementāros pārveidojumus pārveidot LVS
$$\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & +X_3 & = 3 \\ & 3X_2 & +4X_3 & = -1 \\ X_1 & +X_2 & -5X_3 & = 0 \end{cases}$$
par LVS, kuras sistēmas matrica ir

(1) augšēji trijstūrveida matrica,
(2) vienības matrica.

VINGRINĀJUMS 2.18. Pamatot, kāpēc iepriekšējā uzdevumā dotā LVS nav ekvivalenta LVS
$$\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & +X_3 & = 3 \\ & 3X_2 & +4X_3 & = -1. \end{cases}$$

VINGRINĀJUMS 2.19. Interpretēt triviālo vienādojumu izsvītrošanu un seku vienādojumu pievienošanu izmantojot matricu reizināšanu.

3. NODAĻA

Lineāru vienādojumu sistēmu risināšana

3.1. Gausa metode

3.1.1. Matricas un LVS pakāpienveida forma.

Par matricas rindas *nuļļu indeksu* sauksim nepārtrauktas nuļļu virknes garumu, kas sākas no rindas kreisās malas.

PIEMĒRS 3.1. Rindai [0|0|3|1] nuļļu indekss ir 2. Rindai [1|2|4|2] nuļļu indekss ir 0.

Matrica ir *pakāpienveida formā,* ja tās rindu nuļļu indeksu virkne ir augoša kā rindas indeksa funkcija. Citiem vārdiem sakot, šādai matricai rindu nuļļu virknes, palielinoties rindas indeksam, kļūst arvien garākas.

PIEMĒRS 3.2. $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$

Pakāpienveida matricas katras rindas pirmās rūtiņās no kreisās puses, kurās ir nenulles elementi, sauksim par *galvenajām rūtiņām.*

Pakāpienveida matrica, kurai visu galveno rūtiņu elementi ir vienādi ar 1, ir *normalizētā pakāpienveida formā.*

PIEMĒRS 3.3. $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$

Ja LVS sistēmas matrica vai paplašinātā matrica ir normalizētā pakāpienveida formā, tad

- katrs nākamais LVS vienādojums satur mazāk nezināmo nekā iepriekšējais - daži nezināmie tiek *izslēgti,*
- pirmais nenulles koeficients no kreisās malas katrā vienādojumā ir 1.

LVS šādā formā šķiet ērtākas risināšanā, jo var mēģināt sākt risināšanas procesu ar tiem vienādojumiem, kas satur mazāk nezināmo.

PIEMĒRS 3.4. $\left\{\begin{array}{lllll} X_1 & -X_2 & +3X_3 & +2X_4 & =1 \\ 4X_1 & -4X_2 & +13X_3 & +10X_4 & =5 \\ 3X_1 & -3X_2 & +10X_3 & +9X_4 & =8 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} X_1 & -X_2 & +3X_3 & +2X_4 & =1 \\ & & X_3 & +2X_4 & =1 \\ & & & X_4 & =4 \end{array}\right.$

TEORĒMA 3.5.
$\forall$ matricu ar REP var pārveidot normalizētajā pakāpienveida formā.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu konstruktīvi - aprakstīsim algoritmu, ar kura palīdzību $\forall$ matricu $\mathbf{L}$ var pārveidot normalizētajā pakāpienveida formā. Algoritma realizācijas gaitā ar EP palīdzību tiek mainīti matricas elementi.

Algoritma apraksts:

- atrodam pirmo $\mathbf{L}$ kolonnu no kreisās puses, kurā ir vismaz viens nenulles elements, ar REP1 pārvietojam to uz augšējo stūri, ar REP2 pārveidojam to par 1, nosaucam to par *1.galveno rūtiņu*, ar REP3 anulējam ar to visus elementus zem tā, pārejam uz apakšmatricu $\mathbf{L}_1$, kas tiek iegūta izsvītrojot 1.rindu un visas kolonnas, kas ir pa kreisi no 1.galvenās rūtiņas kolonnas,
- atrodam pirmo $\mathbf{L}_1$ kolonnu no kreisās puses, kurā ir vismaz viens nenulles elements, pārvietojam to uz augšējo stūri, pārveidojam par 1, nosaucam to par *2.galveno rūtiņu*, anulējam ar to visus elementus zem tās, pārejam uz apakšmatricu $\mathbf{L}_2$, kas tiek iegūta izsvītrojot 2.rindu un visas kolonnas, kas ir pa kreisi no 2.galvenās rūtiņas kolonnas,
- ... (atkārtojam aprakstītās darbības tik ilgi, kamēr kārtējā apakšmatrica $\mathbf{L}_s$ nav nulles matrica vai tukša).

Algoritms apstājas pēc galīga skaita soļu, jo ar katras jaunas galvenās rūtiņas iegūšanu apakšmatricas rindu skaits samazinās par 1.■

Piezīme 3.6. $\forall$ REP R var realizēt ar matricu reizināšanas palīdzību $\Longrightarrow$ $\forall$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists$ elementāras matricas $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$: $\mathbf{R}_l \cdot ... \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}$ ir pakāpienveida formā.

3.1.2. Algoritms.

Viena no senākajām LVS risināšanas metodēm, Gausa metode, sastāv no šādiem soļiem:

(1) Pārveidojam LVS paplašināto matricu $\mathbf{L}$ normalizētā pakāpienveida formā $\widetilde{\mathbf{L}}$.
(2) Pārrakstām iepriekšējā solī iegūto matricu $\widetilde{\mathbf{L}}$ LVS veidā. Paplašinātās matricas rindas, kas satur tikai nulles, tiek ignorētas.
(3) Nezināmos, kuru indeksi sakrīt ar galveno rūtiņu kolonnu numuriem, sauksim par *galvenajiem nezināmajiem*, pārējos - par *brīvajiem nezināmajiem*.
(4) Izsakām galvenos nezināmos, izmantojot brīvos nezināmos, to indeksu samazināšanas kārtībā, sākot ar pēdējo galveno nezināmo. LVS atrisinājumu kopa ir visas skaitļu virknes, kurās brīvie nezināmie ir neatkarīgi parametri (var pieņemt jebkuras vērtības) un galvenie nezināmie ir izteikti, izmantojot brīvos nezināmos.

Piemērs 3.7. Atrisināsim ar Gausa metodi LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ X_1 & -X_2 & & +2X_4 & -X_5 & = 1 \\ 2X_1 & -2X_2 & -3X_3 & -5X_4 & -7X_5 & = -5. \end{cases}$$

Ar REP $R_{13}(-2)$, $R_{12}(-1)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(-1)$, $R_3(-1/2)$ paplašināto matricu var pārveidot normalizētā pakāpienveida formā

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & -1 & -2 & -4 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

kas atbilst LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ & & X_3 & +3X_4 & +X_5 & = 1 \\ & & & & X_5 & = 2. \end{cases}$$

Risinot šo LVS sākot no pēdējā vienādojuma, iegūsim

$$X_5 = 2,$$

$$X_3 = 1 - X_5 - 3X_4 = -1 - 3X_4,$$

$$X_1 = -1 + X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = -1 + X_2 + 2(-1 - 3X_4) + 4X_4 + 6 = 3 + X_2 - 2X_4.$$

LVS risināšanā ir iespējami trīs dažādi gadījumi:

- ja paplašinātās matricas pakāpienveida forma satur rindu, kurā visi elementi, izņemot pēdējo elementu labajā malā, ir vienādi ar nulli, tad LVS satur vienādojumu $0 = 1$ - LVS nav atrisinājumu (atrisinājumu kopa ir tukša, LVS nav saderīga),
- ja LVS ir saderīga, un tai nav brīvo nezināmo, tad tai ir viens atrisinājums (LVS ir viennozīmīgi atrisināma),
- ja LVS ir saderīga, un tai ir brīvie nezināmie, tad tai bezgalīgā laukā ir bezgalīgi daudz atrisinājumu (atrisinājumu kopa ir bezgalīga), formulu sistēma, kas apraksta galvenos nezināmos kā funkcijas no brīvajiem nezināmajiem, sauksim par *LVS vispārīgo atrisinājumu,* piešķirot brīvajiem nezināmajiem konkrētas vērtības, iegūst *partikulāru atrisinājumu.*

TEORĒMA 3.8. *Ar Gausa metodi tiek atrasti visi LVS atrisinājumi.*

PIERĀDĪJUMS.
Sistēmas ar paplašinātajām matricām $\mathbf{L}$ un $\widetilde{\mathbf{L}}$ ir ekvivalentas. Katra skaitļu virkne, kas tiek atrasta ar Gausa metodi, ir LVS atrisinājums, jo tā apmierina visus vienādojumus. Ja virkne ir LVS atrisinājums, tad tā apmierina visus pakāpienveida LVS vienādojumus, tāpēc tā pieder ar Gausa metodi iegūto virkņu kopai. ■

3.2. Gausa-Ermita metode

Vai ir iespējams turpināt nezināmo izslēgšanu pat pēc LVS pakāpienveida formas iegūšanas? Kādus rindu EP vēl var veikt ar pakāpienveida matricu, lai to "nesabojātu" un iegūtu vairāk nuļļu (izslēgtu no vienādojumiem vairāk nezināmo)?

3.2.1. Matricas un LVS Ermita forma.

Matrica ir *Ermita (Hermite) formā,* ja

- tā ir normalizētajā pakāpienveida formā,
- virs katras galvenās rūtiņas esošajās rūtiņās ir tikai 0.

LVS paplašinātā matrica ir Ermita formā $\Longrightarrow$ katrs galvenais nezināmais tiek izslēgts no visiem vienādojumiem, izņemot vienu.

PIEMĒRS 3.9. Jebkura diagonāla matrica, vienības matricas $\mathbf{E}_m$, $\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & \star & 0 & 0 & \star \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \star \end{array}\right]$.

TEORĒMA 3.10. *$\forall$ matricu ar REP var pārveidot Ermita formā.*

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu konstruktīvi - aprakstīsim algoritmu, ar kura palīdzību jebkuru matricu $\mathbf{L}$ var pārveidot Ermita formā:

<u>1.solis</u> Pārveidojam $\mathbf{L}$ normalizētajā pakāpienveida formā $\widetilde{\mathbf{L}}$.
<u>2.solis</u> Veicot REP3 "uz augšu", anulējam nenulles elementus virs galvenajām rūtiņām, pārveidojot $\widetilde{\mathbf{L}}$ Ermita formā $\mathbf{L}_H$.■

PIEZĪME 3.11. $\forall$ REP R var realizēt ar matricu reizināšanas palīdzību $\Longrightarrow$ $\forall$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists$ elementāras matricas $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$ tādas, ka $\mathbf{R}_l \cdot ... \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}$ ir Ermita formā.

3.2.2. Algoritms.

LVS risināšana ar Gausa-Ermita metodi ir līdzīga Gausa metodei ar atšķirību pirmajā solī: LVS paplašinātā matrica tiek pārveidota Gausa-Ermita formā. Gausa-Ermita metodē galvenos nezināmos ir vieglāk izteikt kā funkcijas no brīvajiem nezināmajiem.

PIEMĒRS 3.12. Atrisināsim ar Gausa-Ermita metodi LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ X_1 & -X_2 & & +2X_4 & -X_5 & = 1 \\ 2X_1 & -2X_2 & -3X_3 & -5X_4 & -7X_5 & = -5. \end{cases}$$

Ar REP $R_{13}(-2)$, $R_{12}(-1)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(-1)$, $R_3(-1/2)$, $R_{21}(2)$, $R_{31}(1)$, $R_{32}(-1)$ paplašināto matricu var pārveidot Ermita formā

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

kas atbilst LVS

$$\begin{cases} {\color{red}X_1} & -X_2 & & +2X_4 & & = 3 \\ & & {\color{red}X_3} & +3X_4 & & = -1 \\ & & & & {\color{red}X_5} & = 2. \end{cases}$$

Risinot šo LVS attiecībā uz galvenajiem nezināmajiem sākot no pēdējā vienādojuma, iegūsim

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 + X_2 - 2X_4 \\ X_2 \\ -1 - 3X_4 \\ X_4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

TEORĒMA 3.13. *Ar Gausa-Ermita metodi tiek atrasti visi LVS atrisinājumi.*

PIERĀDĪJUMS. Tāds pats kā Gausa metodē. ■

3.3. LVS atrisinājumu īpašības

TEORĒMA 3.14.

(1) *LVS ir saderīga* $\iff$ *normalizētā pakāpienveida forma nesatur vienādojumu* $0 = 1$ *(paplašinātajā matricā pēdējā kolonna nesatur galveno rūtiņu).*

(2) *LVS ir saderīga* $\Longrightarrow$ *brīvajiem nezināmajiem var tikt piešķirtas patvaļīgas vērtības.*

(3) $\Big($ *LVS ir saderīga* $\Big) \Longrightarrow \Big($ *LVS* $\exists$ *viens atrisinājums* $\iff$ *galveno nezināmo skaits ir vienāds ar LVS sistēmas matricas kolonnu skaitu* $n\Big)$.

(4) *Homogēnai LVS* $\exists$ *netriviāls atrisinājums* $\iff$ *galveno nezināmo skaits ir mazāks nekā vienādojumu skaits.*

(5) $m < n \Longrightarrow$ *homogēnai LVS* $\exists$ *netriviāls atrisinājums.*

PIERĀDĪJUMS.

1. LVS satur vienādojumu $0 = 1$ $\Longrightarrow$ LVS ir nesaderīga. LVS nesatur vienādojumu $0 = 1$ $\Longrightarrow$ galvenos vienādojumus var izteikt kā funkcijas no brīvajiem nezināmajiem un brīvajiem nezināmajiem var piešķirt patvaļīgas vērtības.

2. Brīvos nezināmos nesaista nekādi nosacījumi. LVS būs apmierināta, ja to vērtības būs patvaļīgas.

3. Ja ir vismaz viens brīvais nezināmais, tad tam var piešķirt patvaļīgas vērtības, tādējādi LVS būs vairāk kā viens atrisinājums. Ja nav neviena brīvā nezināmā, tad visi galvenie nezināmie ir viennozīmīgi noteikti.

4. Homogēnai LVS $\exists$ netriviāls atrisinājums $\iff$ $\exists$ vismaz viens brīvais nezināmais $\iff$ galveno nezināmo skaits ir mazāks nekā vienādojumu skaits.

5. $m < n \implies \exists$ vismaz viens brīvais nezināmais. ■

3.4. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 3.15. Pārveidot matricas normalizētā pakāpienveida formā.

(1) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 4 & -9 \end{array}\right]$;

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$

VINGRINĀJUMS 3.16. Atrisināt LVS ar Gausa metodi.

(1) $\begin{cases} X_1 & +3X_2 & +X_3 & = 2 \\ X_1 & +6X_2 & +X_3 & = -1 \\ 4X_1 & +7X_2 & +2X_3 & = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3X_1 & +6X_2 & -3X_3 & = 12 \\ 2X_1 & +4X_2 & -4X_3 & = 0 \\ X_1 & +2X_2 & +X_3 & = 12 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3X_1 & +18X_2 & +6X_3 & = 0 \\ X_1 & +6X_2 & +4X_3 & = -6 \\ 2X_1 & +12X_2 & +3X_3 & = 0 \end{cases}$

VINGRINĀJUMS 3.17. Pārveidot matricas Ermita formā.

(1) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -3 \\ \hline 4 & -4 & 3 \end{array}\right]$;

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

VINGRINĀJUMS 3.18. Atrisināt LVS ar Gausa-Ermita metodi.

(1) $\begin{cases} X_1 & -3X_2 & -X_3 & +X_4 & = -5 \\ 3X_1 & -9X_2 & & +9X_4 & = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2X_1 & +X_2 & & & = 1 \\ X_1 & +2X_2 & +X_3 & & = 1 \\ & X_2 & +2X_3 & +X_4 & = 1 \\ & & X_3 & +2X_4 & = 1 \end{cases}$

VINGRINĀJUMS 3.19. Atrisināt LVS ar parametriem, izpētīt atrisinājumu kopu atkarību no parametriem.

(1) $\begin{cases} X_1 & +2X_2 & = 3 \\ 2X_2 & +4X_2 & = \alpha. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} X_1 & -X_2 & +\alpha X_3 & = 0 \\ X_1 & -\beta X_2 & +2\gamma X_3 & = 0. \end{cases}$

VINGRINĀJUMS 3.20. Pārveidot Ermita formā.

(1) $\mathbf{A} = [a^{i+j}]_{n,n}$, $a \in \mathbb{R}$.

(2) $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{n-1,n} \ldots \mathbf{R}_{34}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12}$.

4. NODAĻA

Matricas normālā forma un tās lietojumi

4.1. Kolonnu elementārie pārveidojumi

Ar matricu kolonnām, tāpat kā ar rindām, var definēt trīs veidu *kolonnu elementāros pārveidojumus (KEP)* un atbilstošās elementārās matricas, kuras iegūst, veicot kolonnu pārveidojumu matricai $\mathbf{E}_n$:

- KEP1 K_{pq} - p-tās un q-tās kolonnas apmaiņa, $\mathbf{K}_{pq} = \mathbf{R}_{pq}$.
- KEP2 $K_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ, $\mathbf{K}_p(\lambda) = \mathbf{R}_p(\lambda)$.
- KEP3 $K_{pq}(\lambda)$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ un pieskaitīšana q-tajai kolonnai,

$$\mathbf{K}_{pq}(\lambda) = \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^T = \mathbf{R}_{qp}(\lambda).$$

PIEMĒRS 4.1. $\mathbf{K}_{12}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \lambda \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{R}_{12}(\lambda)^T = \mathbf{R}_{21}(\lambda)$.

TEORĒMA 4.2.
(1) *KEP K ar matricu $\boldsymbol{K}$ atbilst matricu pārveidojumam $\boldsymbol{L} \to \boldsymbol{LK}$.*
(2) *K_1,...,K_l - KEP ar elementārajām matricām $\boldsymbol{K}_1$,...,$\boldsymbol{K}_l$. Tad matrica $\boldsymbol{K}_1 \cdot ... \cdot \boldsymbol{K}_l$ ir vienāda ar KEP virknes $K_1, ..., K_l$ pielietošanu vienības matricai.*
(3) *KEP ir invertējami;*
   (a) $K_{pq}^{-1} = K_{pq}$,
   (b) $K_p(\lambda)^{-1} = K_p(1/\lambda)$,
   (c) $K_{pq}(\lambda)^{-1} = K_{pq}(-\lambda)$.

PIERĀDĪJUMS
1. Katrā gadījumā var tikt veikta tieša pārbaude.

2.,3. Pierāda līdzīgi rindu pārveidojumiem. ■

PIEZĪME 4.3. Ja ar $m \times n$ matricu $\mathbf{A}$ tiek veikta KEP virkne $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$, tad rezultējošo pārveidojuma matricu $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 ... \mathbf{K}_u$ var ērti aprēķināt šādā veidā:

(1) definēt bloku matricu $\left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_n \\ \hline \mathbf{A} \end{array}\right]$,
(2) veikt kolonnu pārveidojumus ar matricām $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$, rezultātā tiks iegūta matrica $\left[\begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{AK} \end{array}\right]$.

Ja ir jāseko gan REP, gan KEP, tad ir jādefinē bloku matrica $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{A} \end{array}\right]$ un jāveic EP ar $\mathbf{A}$ bloka rindām vai kolonnām. Vienības matricu blokos tiks iekodēta pārveidojumu vēsture.

4.2. Matricas normālā forma

Kādus KEP var veikt ar Ermita matricu, lai iegūtu pēc iespējas vairāk nuļļu?

$m \times n$ matrica ir *normālajā formā*, ja tā ir bloku matricas formā

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{array}\right].$$

Ja vismaz viens no bloku matricu izmēriem ir vienāds ar 0, tad uzskatām, ka šī bloku matrica ir tukša.

PIEMĒRS 4.4. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$.

TEORĒMA 4.5. *$\forall$ matricu ar REP un KEP var pārveidot normālajā formā.*

PIERĀDĪJUMS Dota $m \times n$ matrica $\mathbf{A}$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ normālajā formā izmantojot šādu algoritmu

(1) Ar REP pārveidojumiem pārveidosim $\mathbf{A}$ Ermita formā $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.
(2) Sākot no augšas ar katru galveno rūtiņu anulēsim visus citus nenulles elementus tās rindā veicot KEP3 "pa labi" un pārveidosim $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ par matricu $\mathbf{B}$, kurā tikai galveno rūtiņu elementi nav 0.
(3) Veicot KEP1 ar mērķi sakārtot galvenās rūtiņas galvenajā diagonālē, pārveidosim $\mathbf{B}$ normālajā formā

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{0}_{n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{m-r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{array}\right]. \blacksquare$$

PIEMĒRS 4.6. $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 9 & -11 & -5 \\ 2 & 6 & -7 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & \end{array}\right]$, ar pārveidojumu virkni $R_{12}(-3)$, $R_{13}(-2)$, $R_{23}(-1)$, $R_{21}(4)$, $K_{14}(-2)$, $K_{12}(-3)$, $K_{34}(-1)$, K_{23}.

4.3. Matricas rangi

4.3.1. Matricas Ermita formas vienīgums.

PIEZĪME 4.7. Matricas pakāpienveida forma nav noteikta viennozīmīgi: $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$ var pārveidot pakāpienveida formā vismaz divos veidos:

- $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$,
- $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 5/4 & 3/2 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$, mainot rindas pirmajā solī.

Abas pakāpienveida matricas pārveidojas uz vienu Ermita matricu $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$. Pakāpienveida formā neviennozīmība var būt, piemēram, rūtiņās, kas atrodas virs galvenajām.

TEORĒMA 4.8. *Katru matricu ar REP palīdzību var pārveidot uz viennozīmīgi noteiktu matricu Ermita formā (matricas Ermita forma ir viennozīmīgi noteikta).*

PIERĀDĪJUMS Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru n (kolonnu skaits).

Indukcijas bāze $n = 1 \implies$ apgalvojums ir patiess, jo Ermita forma ir $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array}\right]$, ja matrica ir $\mathbf{O}_{m,1}$, vai $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array}\right]$.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess visām matricām, kuru kolonnu skaits ir stingri mazāks nekā n un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess, ja kolonnu skaits ir vienāds ar n.

Pieņemsim, ka $\exists$ $m \times n$ matrica $\mathbf{A}$, kurai ir dažādas Ermita formas $\mathbf{H}_1$ un $\mathbf{H}_2$. Sadalīsim Ermita formas blokos:

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{F}_1|\mathbf{k}_1],$$
$$\mathbf{H}_2 = [\mathbf{F}_2|\mathbf{k}_2].$$

Bloki $\mathbf{F}_1$ un $\mathbf{F}_2$ arī ir Ermita matricas, jo nogriežot Ermita matricas pēdējo kolonnu kolonnu Ermita matricas īpašība saglabājas $\Longrightarrow$ saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$, jo $\mathbf{F}_1$ un $\mathbf{F}_2$ ir Ermita formas matricai ar $n-1$ kolonnām, ko iegūst, nogriežot no $\mathbf{A}$ pēdējo kolonnu.

Jāpierāda, ka $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

Domāsim par sākotnējo matricu $\mathbf{A}$ kā par LVS paplašināto matricu. Ir iespējami divi gadījumi.

$\mathbf{A}$ atbilst nesaderīgai LVS.
Tad pēdējā kolonnā (brīvo locekļu kolonnā) ir nenulles elements zem $\mathbf{F}$ zemākās nenulles rindas $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ Ermita formā pēdējā kolonnā ir 1 vienā noteiktā vietā $\Longrightarrow$ $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

$\mathbf{A}$ atbilst saderīgai LVS.
$\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$ $\Longrightarrow$ vismaz vienā LVS vienādojumā iegūsim pretrunu:

$$a_{i1}X_1 + ... + a_{in}X_n = \underbrace{b_i}_{\text{no } \mathbf{k}_1} \neq \underbrace{b_i'}_{\text{no } \mathbf{k}_2}. \blacksquare$$

Matricas $\mathbf{A}$ Ermita formu apzīmēsim ar $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.

4.3.2. Matricas rindu rangs.

TEORĒMA 4.9. *Matricas pakāpienveida formas galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi (neatkarīgi no REP izvēles).*

PIERĀDĪJUMS Matricas Ermita forma tiek iegūta no normalizētas pakāpienveida formas veicot REP uz augšu, izmantojot jau esošās galvenās rūtiņas. Šajos REP galvenās rūtiņas nemainās. Matricas Ermita forma ir noteikta viennozīmīgi $\Longrightarrow$ galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi. $\blacksquare$

Par matricas $\mathbf{A}$ *rindu rangu* $rr(\mathbf{A})$ sauc galveno rūtiņu skaitu jebkurā $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā. Lai atrastu $rr(\mathbf{A})$, pietiek pārveidot $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā un saskaitīt galvenās rūtiņas.

TEORĒMA 4.10. *REP saglabā rindu rangu.*

PIERĀDĪJUMS Atcerēsimies, ka REP ir invertējami - $\forall$ R $\exists$ R^{-1} :

$$R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = \text{id}\,.$$

Seko, ka arī elementārās matricas ir invertējamas: $\exists$ $\mathbf{R}^{-1}$:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{E}.$$

Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ var pārveidot uz Ermita formu $\mathbf{H}$ ar REP virkni $R_1, ..., R_l$.

Pieņemsim, ka ar $\mathbf{A}$ tiek veikts REP R $\Longrightarrow$
$\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{A}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}' = \underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}}_{=\mathbf{E}}\mathbf{A}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}'$ $\Longrightarrow$

$\mathbf{A}'$ var pārveidot uz $\mathbf{H}$ ar REP virkni $R^{-1}, R_1, ..., R_l \implies \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathcal{H}(\mathbf{A}') \implies rr(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}')$. ■

TEORĒMA 4.11. *(Kronekers-Kapelli) LVS ir saderīga* $\iff$ *tās sistēmas matricas rindu rangs ir vienāds ar paplašinātās matricas rindu rangu.*

PIERĀDĪJUMS Dota LVS ar sistēmas matricu $\mathbf{A}$ un paplašināto matricu $\mathbf{L} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Ar REP pārveidosim matricu Ermita formā $\mathbf{RL} = [\mathbf{RA}|\mathbf{Rb}]$, kur $\mathbf{RA}$ arī ir Ermita matrica.

LVS ir saderīga $\iff$ paplašinātās matricas pēdējā kolonnā nav galvenās rūtiņas $\iff$ $rr(\mathbf{L}) = rr(\mathbf{A})$. ■

4.3.3. Matricas kolonnu rangs.

Var definēt matricu

- *kolonnu pakāpienveida* formu un
- *kolonnu Ermita* formu,

uz kurām matricu var pārveidot veicot tikai KEP. Atšķirība no rindu pakāpienveida formas algoritma - tiek mainīti vietām rindu un kolonnu indeksi.

PIEZĪME 4.12. $(\mathbf{AK})^T = \mathbf{K}^T\mathbf{A}^T \implies$ KEP $\mathbf{K}$ ar $\mathbf{A}$ ir tas pats, kas REP $\mathbf{K}^T$ ar $\mathbf{A}^T$. Attiecīgi mainās arī pakāpienveida un Ermita formas.

PIEMĒRS 4.13. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -3 & 1 \\ \hline 4 & -12 & 4 \\ \hline -3 & 10 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$, KEP virkne: $K_{23}(1)$, $K_3(2)$, $K_{12}(-3)$, $K_{13}(1)$.

KEP gadījumā ir spēkā tādi paši rezultāti kā REP gadījumā:

- $\forall$ matricu var pārveidot kolonnu pakāpienveida formā,
- matricas $\mathbf{A}$ kolonnu Ermita forma $\mathcal{H}_K(\mathbf{A})$ ir noteikta viennozīmīgi,
- galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi (neatkarīgi no KEP izvēles).

Par matricas $\mathbf{A}$ *kolonnu rangu* $rk(\mathbf{A})$ sauc galveno rūtiņu skaitu jebkurā kolonnu pakāpienveida formā. Tāpat kā REP gadījumā var pierādīt, ka KEP saglabā kolonnu rangu.

PIEMĒRS 4.14. $rr(\mathbf{E}_n) = rk(\mathbf{E}_n)$. Normālai matricai $rr = rk$.

4.3.4. Matricas rangs.

4.3.4.1. *Rindu un kolonnu rangu vienādība.*

TEORĒMA 4.15. $\forall$ *REP un KEP saglabā rindu un kolonnu rangus.*

PIERĀDĪJUMS. Pietiek pierādīt, ka KEP saglabā rindu rangu. Salīdzināsim rindu rangus matricām $\mathbf{A}$ un $\mathbf{AK}$, kur $\mathbf{K}$ ir KEP matrica. Pārveidosim $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā ar REP, iegūsim pakāpienveida matricu $\mathbf{B} = \mathbf{RA}$.

Tā kā REP nemaina rindu rangu, pietiek salīdzināt rindu rangus matricām $\mathbf{B}$ un $\mathbf{BK}$.

Ar KEP nevar iegūt papildus nenulles rindas $\implies rr(\mathbf{B}) \geq rr(\mathbf{BK})$. Citiem vārdiem sakot, KEP nepalielina rindu rangu.

$\forall$ KEP ir invertējami $\implies \exists\ \mathbf{K}^{-1}$: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{KK}^{-1}) = (\mathbf{BK})\mathbf{K}^{-1} \implies rr(\mathbf{BK}) \geq rr(\mathbf{BKK}^{-1}) = rr(\mathbf{B})$. Seko, ka $rr(\mathbf{B}) = rr(\mathbf{BK})$. ■

TEORĒMA 4.16.

(1) $\forall$ $\boldsymbol{A}$ $rr(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{A})$.

(2) *Ar REP un KEP matricu var pārveidot uz viennozīmīgi noteiktu normālo formu (matricas normālā forma ir noteikta viennozīmīgi).*

PIERĀDĪJUMS.
1. Ar REP un KEP, kas nemaina ne rindu, ne kolonnu rangu, $\mathbf{A}$ var pārveidot normālajā formā, kurā abi rangi sakrīt.

2. REP un KEP saglabā abus rangus $\Longrightarrow$ jebkurām divām dotās matricas normālajām formām ir vienāds rangs $\Longrightarrow$ tās sakrīt. ■

Matricas $\mathbf{A}$ normālo formu apzīmēsim ar $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

4.3.4.2. *Matricas rangs un tā īpašības.*
Par matricas $\mathbf{A}$ *rangu* $r(\mathbf{A})$ sauc $rr(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A})$.

Lai atrastu matricas rangu, pietiek atrast tās rindu vai kolonnu rangu ņemot vērā šādus faktus:

- gan rindu, gan kolonnu elementārie pārveidojumi saglabā rangu;
- rangs ir vienāds ar galveno rūtiņu skaitu jebkurā no šādam matricas formām:
  - rindu vai kolonnu pakāpienveida formā,
  - rindu vai kolonnu Ermita formā,
  - normālajā formā;
- matricu formas, kurās tiek skaitītas galvenās rūtiņas, var būt arī ne obligāti normalizētas.

Divas vienāda izmēra matricas sauc par ekvivalentām, ja tām ir

- vienāds rangs vai
- vienāda normālā forma.

TEORĒMA 4.17.

(1) $\boldsymbol{A}$ - $m \times n$ *matrica* $\Longrightarrow$ $r(\boldsymbol{A}) \le \min(m, n)$.
(2) $r(\lambda \boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$, *ja* $\lambda \neq 0$.
(3) $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\begin{cases} r(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}) \le m \\ r(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) \le n \end{cases} \Longrightarrow r(\mathbf{A}) \le \min(m, n).$

2. $\mathbf{A}$ un $\lambda\mathbf{A}$ var pārveidot pakāpienveida formā ar vienu un to pašu REP virkni.

3. $r(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T)$. ■

4.4. Nezināmo substitūcijas metode LVS risināšanā

Rindu EP iespējas nezināmo izslēgšanai ir izsmeltas ar Gausa-Ermita metodi. Var mēģināt izmantot brīvību veikt līdzīgas operācijas ar kolonnām. Problēma ir tur, ka LVS kolonnu elementārie pārveidojumi nesaglabā atrisinājumu kopas. Šo problēmu var novērst interpretējot kolonnu elementāros pārveidojumus kā nezināmo substitūcijas.

4.4.1. Kolonnu elementārie pārveidojumi kā nezināmo substitūcijas.

Dota LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Veiksim ar $\mathbf{A}$ KEP virkni ar matricām $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$. $\mathbf{A}$ pārveidosies par $\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{K}_1...\mathbf{K}_u}_{=\mathbf{K}} = \mathbf{AK}$. Atcerēsimies, ka $\forall$ $\mathbf{K}_i$ $\exists$ inversā KEP matrica $\mathbf{K}_i^{-1}$. Apzīmēsim $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}_u^{-1}...\mathbf{K}_1^{-1}$. Ievērosim, ka

$$\mathbf{KK}^{-1} = \mathbf{K}_1...\mathbf{K}_u\mathbf{K}_u^{-1}...\mathbf{K}_1^{-1} = \mathbf{E}_n.$$

Redzam, ka

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{AE}_n)\mathbf{x} = (\mathbf{AKK}^{-1})\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{AK})}_{=\mathbf{A}'}\underbrace{(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x})}_{=\mathbf{y}} = \mathbf{b}.$$

Esam ieguvuši jaunu LVS $\mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{b}$ attiecībā uz ”jaunajiem” nezināmajiem $\mathbf{y}$. ”Vecos” nezināmos $\mathbf{x}$ un ”jaunos” nezināmos $\mathbf{y}$ saista matricu vienādojumi

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} = \mathbf{Ky}. \end{cases}$$

Teorēma 4.18.
$\boldsymbol{K}$ ir KEP matricu reizinājums. Funkcija $\varphi : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}$ $\forall$ LVS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ atrisinājumam $\boldsymbol{x}^0$ savstarpēji viennozīmīgi piekārto LVS $(\boldsymbol{AK})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ atrisinājumu $\boldsymbol{y}^0$.

Pierādījums
$\mathbf{Ax}^0 = \mathbf{b} \implies \mathbf{AKK}^{-1}\mathbf{x}^0 = (\mathbf{AK})\mathbf{y}^0 = \mathbf{b}$.

$\underline{\varphi \text{ injektivitāte}}$
$\begin{cases} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{y}^0 \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{y}^0 \end{cases} \implies \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0) = \mathbf{0} \implies \mathbf{KK}^{-1}(\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0 = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_2^0$.

$\underline{\varphi \text{ sirjektivitāte}}$
Izvēlēsimies patvaļīgu LVS $(\mathbf{AK})\mathbf{y} = \mathbf{b}$ atrisinājumu $\widetilde{\mathbf{y}}$. Definēsim $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\widetilde{\mathbf{y}}$. Redzam, ka

(1) $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{AK}\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{b}^0 \implies \widetilde{\mathbf{x}}$ apmierina LVS $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$,
(2) $\mathbf{K}^{-1}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{y}} \implies \widetilde{\mathbf{y}}$ ir φ attēlā.

4.4.2. Algoritms. Dota LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica. Aprakstīsim algoritmu LVS atrisināšanai izmantojot REP, KEP un normālo formu.

(1) Definēt bloku matricu $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_n & \mathbf{0}_{n,1} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$.
(2) Ar REP un KEP pārveidot $\mathbf{A}$ normālajā formā, iegūt matricu $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{0}_{n,1} \\ \hline \mathbf{N} & \mathbf{b}' \end{array}\right]$.
(3) Atrisināt LVS $\mathbf{Ny} = \mathbf{b}'$ attiecībā uz $\mathbf{y}$.
(4) Izmantojot pārveidojumu $\mathbf{x} = \mathbf{Ky}$, atrast $\mathbf{x}$.

Piemērs 4.19. Atrisināsim ar nezināmo substitūcijas metodi LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ X_1 & -X_2 & & +2X_4 & -X_5 & = 1 \\ 2X_1 & -2X_2 & -3X_3 & -5X_4 & -7X_5 & = -5. \end{cases}$$

Ar REP paplašināto matricu var pārveidot Ermita formā

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definēsim bloku matricu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Veiksim KEP, lai pārveidotu apakšējo kreiso bloku normālajā formā: K_{23}, K_{35}, $K_{14}(-2)$, $K_{15}(1)$, $K_{24}(-3)$. Iegūsim matricu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Atrisināsim iegūto LVS

$$\begin{cases} Y_1 & & & = 3 \\ & Y_2 & & = -1 \\ & & Y_3 & = 2. \end{cases}$$

attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix}$. Iegūsim $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix}$. Pāriesim atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2Y_4 + Y_5 \\ Y_5 \\ -1 - 3Y_4 \\ Y_4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

TEORĒMA 4.20. *Ar nezināmo substitūciju metodi tiek atrasti visi LVS atrisinājumi.*

PIERĀDĪJUMS. Līdzīgs pierādījumam Gausa un Gausa-Ermita metodes gadījumos. ■

4.5. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 4.21. Pārveidot matricas normālajā formā. Atrast REP un KEP matricas.

(1) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$.

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

(3) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 4.22. Pierādīt, ka katra normāla matrica, kurai uz galvenās diagonāles ir vismaz viena 0, izsakās kā divu nilpotentu matricu reizinājums.

VINGRINĀJUMS 4.23. Pārveidot matricas kolonnu pakāpienveida un kolonnu Ermita formā.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

VINGRINĀJUMS 4.24. Atrast matricu rangus.

(1) $\begin{bmatrix} -12 & 4 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

VINGRINĀJUMS 4.25. Atrast matricu rangus atkarībā no parametriem.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & -2 & \beta \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & 1 \end{bmatrix}$.

VINGRINĀJUMS 4.26. Atrisināt matricu vienādojumu $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_2$, kur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(*Norādījums: atrodiet LVS, kas ir ekvivalenta matricu vienādojumam*)

VINGRINĀJUMS 4.27. Pierādīt nevienādības un vienādības.

(1) $r(\mathbf{AB}) \leq \min\Big(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\Big)$;
(2) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;
(3) $r([\mathbf{A}|\mathbf{B}]) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;
(4) $r(\mathbf{A}^H\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, kur $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$.

VINGRINĀJUMS 4.28. Aprakstīt visas iespējamās $m \times n$ Ermita matricas.

VINGRINĀJUMS 4.29. Pierādīt, ka $\forall\, m \times n$ matricu $\mathbf{A}:\ r(\mathbf{A}) = 1$, var izteikt formā $\mathbf{A} = \mathbf{KR}$, kur $\mathbf{K}$ ir $m \times 1$ matrica (kolonna), $\mathbf{R}$ ir $1 \times n$ matrica (rinda). Atrast $\mathbf{K}$ un $\mathbf{R}$, ja ir dota $\mathbf{A}$.

VINGRINĀJUMS 4.30. Atrast rangu matricai

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

VINGRINĀJUMS 4.31. Iepazīstieties ar internetā pieejamo spēli "All Lights". Izstrādājiet metodi, ar kuras palīdzību var pareizi iekrāsot visus laucıņus, ja ir doti patvaļīgi tabulas izmēri.

VINGRINĀJUMS 4.32. Telpā ir dotas 4 taisnes, nekādas 2 no tām nekrustojas un nav paralēlas, nekādas 3 nav koplanāras. Vai vienmēr eksistē kāda taisne, kas krusto visas 4 dotās taisnes?

5. NODAĻA

Matricu invertēšana

Matricām var definēt un pētīt operācijas, kas vispārina skaitļu invertēšanu $a \to \frac{1}{a}$. Ievērosim, ka skaitļiem $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, ja $a \neq 0$. Matricu algebrā:

- skaitļa 1 analogs ir vienības matrica $\mathbf{E}$;
- ja ir dota matrica $\mathbf{A}$, var meklēt matricas, kuras reizinot ar $\mathbf{A}$ no labās vai kreisās puses, iegūsim vienības matricas.

5.1. Definīcijas un pamatīpašības

$\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica. $n \times m$ matrica $\mathbf{A}_L$ ir $\mathbf{A}$ *labā inversā matrica*, ja $\mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_m$. $n \times m$ matrica $\mathbf{A}_K$ ir $\mathbf{A}$ *kreisā inversā matrica*, ja $\mathbf{A}_K\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Piezīme 5.1. $\mathbf{A}_L$, $\mathbf{A}_K$ un vienības matricu izmēri ir noteikti viennozīmīgi.

Piemērs 5.2. $\mathbf{A} = [a] \implies \mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L = [\frac{1}{a}]$, ja $a \neq 0$.

Teorēma 5.3. *$\boldsymbol{A}$ ir $m \times n$ matrica* $\implies$
(1) $\exists\ \boldsymbol{A}_L \iff r(\boldsymbol{A}) = m$,
(2) $\exists\ \boldsymbol{A}_K \iff r(\boldsymbol{A}) = n$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pamatideja - risināt matricu vienādojumu $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_m$ un interpretēt to kā LVS atiecībā uz $\mathbf{X}$ elementiem.

- Izteiksim $\mathbf{X}$ un $\mathbf{E}_m$ kā kolonnu bloku matricas:
$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|...|\mathbf{x}_m],$$
$$\mathbf{E}_m = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|...|\mathbf{e}_m].$$
- Apskatīsim matricu vienādojuma kreiso pusi
$$\mathbf{AX} = [\mathbf{Ax}_1|\mathbf{Ax}_2|...|\mathbf{Ax}_m].$$
- Salīdzinot kreisās un labās puses matricas pa rindām, iegūsim sistēmu
$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{Ax}_m = \mathbf{e}_m. \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{Ax}_1 & +\mathbf{0x}_2 & +... & +\mathbf{0x}_m & = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0x}_1 & +\mathbf{Ax}_2 & +... & ... & = \mathbf{e}_2 \\ ... & ... & ... & ... & = ... \\ \mathbf{0x}_1 & +\mathbf{0x}_2 & +... & +\mathbf{Ax}_m & = \mathbf{e}_m \end{cases}$$
- Pārveidosim šo sistēmu LVS formā:
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A} & & & \\ \hline & \mathbf{A} & & \\ \hline & & ... & \\ \hline & & & \mathbf{A} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{x}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \hline \mathbf{e}_2 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{e}_m \end{array}\right].$$

Pārveidosim sistēmas paplašināto matricu ar REP saskaņā ar šādu algoritmu:

- katru no joslām, kurā ir viens bloks $\mathbf{A}$, pārveidosim bloku $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā veicot REP joslas robežās;
- katrā joslā veiksim vienu un to pašu REP virkni.

Pēc šiem pārveidojumiem iegūsim paplašināto matricu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{A}' & & & & \mathbf{e}'_1 \\ \hline & \mathbf{A}' & & & \mathbf{e}'_2 \\ \hline & & \dots & & \dots \\ \hline & & & \mathbf{A}' & \mathbf{e}'_m \end{array}\right]$$

Ievērosim, ka matrica $\mathbf{E}' = [\mathbf{e}'_1|...|\mathbf{e}'_m]$ tiek iegūta no $\mathbf{E}_m$ ar REP pārveidojumu palīdzību.

$r(\mathbf{A}) < m \implies \mathbf{A}'$ satur nulles rindas $\implies$ lielā sistēmas matrica satur nulles rindas katras joslas noteiktā vietā $\implies$ lielā sistēma satur apakšsistēmu

$$\begin{cases} 0 = e'_{i1} \\ \dots \\ 0 = e'_{im}, \end{cases}$$

kur $\mathbf{r}' = [e'_{i1}, ..., e'_{im}]$ ir kāda matricas $\mathbf{E}'$ rinda. Bet $r(\mathbf{E}') = m \implies \mathbf{r}' \neq \mathbf{0} \implies$ LVS un tādējādi arī matricu vienādojumam $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_m$ nav atrisinājumu.

$r(\mathbf{A}) = m \implies \forall$ sistēmas matricas rinda satur galveno rūtiņu $\implies$ LVS un tādējādi arī matricu vienādojums ir atrisināms.

2. Pētīsim matricu vienādojumu $\mathbf{XA} = \mathbf{E}_n$ vai tam ekvivalento vienādojumu $\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{E}_n$. Saskaņā ar 1. $\exists\ \mathbf{X} \iff r(\mathbf{A}^T) = n$. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})^T \implies \exists\ \mathbf{X} \iff r(\mathbf{A}) = n$. ■

Teorēma 5.4. *$\boldsymbol{A}$ ir $m \times n$ matrica, $\exists\ \boldsymbol{A}_L, \exists\ \boldsymbol{A}_K \implies$*
(1) *$m = n$,*
(2) *$\boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A}_K$.*

PIERĀDĪJUMS
1. $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K \implies r(\mathbf{A}) = m = n$.

2. $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K, m = n \implies \begin{cases} \mathbf{AA}_L = \mathbf{E}_m \\ \mathbf{A}_K\mathbf{A} = \mathbf{E}_m \end{cases} \implies$

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_K(\mathbf{AA}_L) = (\mathbf{A}_K\mathbf{A})\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_n\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_L. ■$$

5.2. Kvadrātveida matricu invertēšana

Ja $n \times n$ matricai $\mathbf{A}\ \exists$ *inversā matrica* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L$, tad $\mathbf{A}$ sauc par *invertējamu matricu*. Visu invertējamu $n \times n$ matricu kopu ar elementiem skaitļu laukā k apzīmē ar $GL(n,k)$ (*general linear group*), $GL(n,k) \subsetneq \mathcal{M}at(n,k)$. Ja kvadrātveida matricai neeksistē inversā matrica, to sauc par *neinvertējamu* (*singulāru, deģenerētu*).

5.2.1. Invertējamu matricu īpašības.

Teorēma 5.5.
(1) *$\boldsymbol{E}_n^{-1} = \boldsymbol{E}_n$.*
(2) *$\boldsymbol{R}_{pq}^{-1} = \boldsymbol{R}_{pq}$.*
(3) *$\boldsymbol{R}_p(\lambda)^{-1} = \boldsymbol{R}_p(\frac{1}{\lambda})$.*
(4) *$\boldsymbol{R}_{pq}(\lambda)^{-1} = \boldsymbol{R}_{pq}(-\lambda)$.*

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{E}_n \underbrace{\mathbf{E}_n}_{\mathbf{E}_n^{-1}} = \mathbf{E}_n$.

2. Veicot 1.veida REP divas reizes, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_{pq} \underbrace{\mathbf{R}_{pq}}_{=\mathbf{R}_{pq}^{-1}} = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_{pq}^{-1} = \mathbf{R}_{pq}.$$

3. Veicot 2.veida REP virkni $R_p(\lambda)$, $R_p(\frac{1}{\lambda})$, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda})\mathbf{R}_p(\lambda) = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda}).$$

4. Veicot 3.veida REP virkni $R_{pq}(\lambda)$, $R_{pq}(-\lambda)$, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_{pq}(-\lambda)\mathbf{R}_{pq}(\lambda) = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_{pq}(-\lambda).\blacksquare$$

TEORĒMA 5.6. *(fundamentālā teorēma par invertējamām matricām)* $\mathbf{A}$ ir $n \times n$ matrica. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

(1) $\exists\ \mathbf{A}_L$.
(2) $\exists\ \mathbf{A}_K$.
(3) $r(\mathbf{A}) = n$.
(4) $\mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$.
(5) $\mathbf{A}$ ir vienāda ar elementāro matricu reizinājumu.

PIERĀDĪJUMS 1., 2., 3. ir ekvivalenti saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu:

$$\exists\ \mathbf{A}_L \iff r(\mathbf{A}) = n \iff \exists\ \mathbf{A}_K.$$

<u>3. $\Longrightarrow$ 4.</u>
$r(\mathbf{A}) = n \Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A})$ ir n galvenās rūtiņas $\Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$.

<u>4. $\Longrightarrow$ 3.</u>
$r(\mathbf{E}_n) = n \Longrightarrow r(\mathbf{A}) = n$.

<u>3. $\Longrightarrow$ 5.</u>
$r(\mathbf{A}) = n \Longrightarrow \mathbf{A}$ ar REP var pārveidot par Ermita matricu $\mathbf{E}_n$:

$$(\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l)\mathbf{A} = \mathbf{E}_n \Longrightarrow \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{E}_n \Longrightarrow$$
$$\mathbf{R}_2 ... \mathbf{R}_l\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{E}_n \Longrightarrow \ ... \ \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}_l^{-1} ... \mathbf{R}_1^{-1}.$$

<u>5. $\Longrightarrow$ 3.</u>
$\mathbf{A}$ ir elementāro matricu reizinājums $\Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_u \Longrightarrow$

$$\mathbf{Q}_u^{-1} ... \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{Q}_u^{-1} ... \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_u = \mathbf{E}_n$$

$\Longrightarrow \mathbf{A}$ ar REP palīdzību var pārvērst par $\mathbf{E}_n \Longrightarrow r(\mathbf{A}) = n$. $\blacksquare$

TEORĒMA 5.7. *$\boldsymbol{A} \in GL(n,k)$.*

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ *ir noteikta viennozīmīgi.*
(2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.
(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.
(4) $\boldsymbol{B} \in GL(n,k) \Longrightarrow (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(5) $(\boldsymbol{A}^l)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^l$, $\forall\ l \in \mathbb{N}$.
(6) $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ $\exists$ divas inversās matricas $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$:
$\mathbf{AX} = \mathbf{AY} = \mathbf{XA} = \mathbf{YA} = \mathbf{E}_n \implies \mathbf{X} = \mathbf{XE}_n = \mathbf{X}(\mathbf{AY}) = (\mathbf{XA})\mathbf{Y} = \mathbf{E}_n\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$.

2. $\underbrace{\mathbf{A}}_{(\mathbf{A}^{-1})^{-1}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$.

3. $(\lambda\mathbf{A})(\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(\mathbf{AA}^{-1}) = \mathbf{E}_n$.

4. $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{BB}^{-1}}_{=\mathbf{E}_n})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}_n$.

5.$(\mathbf{A}^l)(\mathbf{A}^{-1})^l = \underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{l \text{ reizes}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}...\mathbf{A}^{-1}}_{l \text{ reizes}} = \mathbf{A}...(\underbrace{\mathbf{AA}^{-1}}_{=\mathbf{E}_n})...\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$.

6. $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}_n \implies (\mathbf{AA}^{-1})^T = \mathbf{E}_n^T = \mathbf{E}_n \implies (\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{E}_n \implies (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
■

PIEZĪME 5.8. Definēsim $\mathbf{A}^{-l} = (\mathbf{A}^{-1})^l$, $\forall\ l \in \mathbb{N}$.

PIEZĪME 5.9. Definēsim $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

PIEZĪME 5.10. $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_l$ ir invertējamas vienāda izmēra matricas $\implies$

$$(\mathbf{A}_1...\mathbf{A}_l)^{-1} = \mathbf{A}_l^{-1}...\mathbf{A}_1^{-1}.$$

PIEZĪME 5.11. ($GL(n, k)$ *ir grupa*)

(1) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in GL(n, k) \implies \mathbf{AB} \in GL(n, k)$ ($GL(n, k)$ ir slēgta attiecībā uz reizināšanu).
(2) $\mathbf{A} \in GL(n, k) \implies \mathbf{A}^{-1} \in GL(n, k)$ ($GL(n, k)$ ir slēgta attiecībā uz inverso elementu pievienošanu).
(3) $\mathbf{E}_n \in GL(n, k)$($GL(n, k)$ satur *neitrālo elementu*).

PIEZĪME 5.12. Invertējamu matricu summa var nebūt invertējama - $GL(n, k)$ nav slēgta attiecībā uz saskaitīšanu: $\mathbf{E}_n + (-\mathbf{E}_n) = \mathbf{O}_n$. Neinvertējamu matricu summa var būt invertējama: $\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22} = \mathbf{E}_2$.

TEORĒMA 5.13. *Visas dotās matricas ir kvadrātveida un vienāda izmēra.*
$$\boldsymbol{S} \notin GL(n, k) \implies \begin{cases} \boldsymbol{AS} \notin GL(n, k) \\ \boldsymbol{SA} \notin GL(n, k), \ \forall\ \boldsymbol{A}. \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{AS} = \mathbf{X}$- invertējama $\implies \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{E} \implies (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{S} = \mathbf{E} \implies$
$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A} \implies \mathbf{S}$ - invertējama - pretruna. Līdzīgi pierāda apgalvojumu par $\mathbf{SA}$. ■

5.2.2. Matricu invertēšana un LVS risināšana.

TEORĒMA 5.14. *$\boldsymbol{A}$ ir $n \times n$ matrica. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*
(1) $\exists\ \boldsymbol{A}^{-1}$.
(2) *LVS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ $\exists$ tieši viens atrisinājums $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.*
(3) *LVS $\boldsymbol{Ax} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.*

PIERĀDĪJUMS
$\underline{1 \implies 2}$
$\exists\ \mathbf{A}^{-1} \implies \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ - viennozīmīgi noteikts atrisinājums.

$\underline{2 \implies 3}$
LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\exists$ viens atrisinājums $\implies r(\mathbf{A}) = n \implies$ LVS $\mathbf{Ax} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums.

$\underline{3 \implies 1}$
LVS $\mathbf{Ax} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums $\implies r(\mathbf{A}) = n \implies \exists\ \mathbf{A}^{-1}$. ■

5.2.3. Kvadrātveida matricas invertēšanas algoritms. Aprakstīsim algoritmu, ar kuru var atrast invertējamas $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ inverso matricu $\mathbf{A}^{-1}$. Algoritma pamatideja: $\mathbf{A}$ ir invertējama $\implies$ $\mathbf{A}$ ar REP var pārvērst Ermita matricā $\mathbf{E}_n$:

$$\underbrace{\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l}_{=\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

Seko, ka $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}_1...\mathbf{R}_l$ ir vienāds ar REP virknes pielietošanas rezultātu attiecībā uz $\mathbf{E}_n$. Ir vēlams pēc iespējas ērtāk aprēķināt reizinājumu $\mathbf{R}_1...\mathbf{R}_l$, ko var veikt ar atbilstošas bloku matricas palīdzību.

Algoritms:
(1) Definēsim bloku matricu $\mathbf{B} = [\mathbf{E}_n|\mathbf{A}]$.
(2) Veiksim ar $\mathbf{B}$ REP tā, lai otrajā blokā iegūtu $\mathbf{E}_n$, šī soļa rezultātā tiks iegūta bloku matrica $[\mathbf{X}|\mathbf{E}_n]$, kur $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

PIEMĒRS 5.15. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{array}\right]$. Konstruējam bloku matricu $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$. Ar REP virkni $R_{12}(2)$, $R_2(1/7)$, $R_{21}(-2)$ pārveidosim šo matricu formā $\left[\begin{array}{cc|cc} 3/7 & -2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 1/7 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Redzam, ka $\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{array}\right]$.

5.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 5.16. Pierādīt, ka matricai

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 12 \\ \hline -4 & 11 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

neeksistē ne labā, ne kreisā inversā matrica.

VINGRINĀJUMS 5.17. Atrast inversās matricas:
(1) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline -3 & 6 \end{array}\right]$,
(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$,

(3) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 5.18. Atrast inversās matricas:

(1) $\left[\begin{array}{c|c} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \hline -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right]$,

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 1 & a \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 5.19. Dota invertējama kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$. Matricai $\mathbf{A}$ veic noteiktu elementāro pārveidojumu $\mathbf{A} \to \mathbf{RA}$. Ar ko ir vienāda matrica $(\mathbf{RA})^{-1}$? Kā to interpretēt elementāro pārveidojumu terminos ?

VINGRINĀJUMS 5.20.

(1) Pierādīt, ka $\forall\ \mathbf{A} \in GL(n,k)$ var pārveidot formā $\mathbf{R}_n(\lambda)$ izmantojot tikai REP3.
(2) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,m,k)$. Pārveidot $\mathbf{A}$ par matricu, kas satur minimālu skaitu nenulles elementu, izmantojot tikai REP3 un KEP3. Minimizējiet arī nenulles elementu skaitu, kas nav vienādi ar 1.

VINGRINĀJUMS 5.21. Kvadrātveida matricu $\mathbf{A}$ sauc par *nilpotentu,* ja eksistē $n \in \mathbb{N}$ tāds, ka $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.

(1) Pierādīt, ka nilpotenta matrica nevar būt invertējama.
(2) Atrast visas nilpotentas 2×2 matricas.
(3) Pierādīt, ka ja $\mathbf{A}$ ir nilpotenta, tad $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ ir invertējama, atrast $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}$.

VINGRINĀJUMS 5.22. Pierādīt, ka katru neinvertējamu kvadrātveida matricu var izteikt kā 1 vai 2 nilpotentu matricu reizinājumu.

VINGRINĀJUMS 5.23. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ - $n \times n$ matricas. Pierādīt, ka $\mathbf{E} + \mathbf{AB}$ ir invertējama tad un tikai tad, ja $\mathbf{E} + \mathbf{BA}$ ir invertējama.

VINGRINĀJUMS 5.24. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m,k}$. Pierādīt, ka matricu vienādojums $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ir atrisināms $\iff r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{B}])$.

VINGRINĀJUMS 5.25. Pierādīt, ka $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$, ja matricai $\mathbf{B}$ eksistē labā inversā matrica.

VINGRINĀJUMS 5.26. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,k}$. Pierādīt, ka matricu vienādojums $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ir viennozīmīgi atrisināms $\iff$ $\mathbf{A}$ ir invertējama matrica.

VINGRINĀJUMS 5.27. Izpētīt matricu vienādojuma $\mathbf{AXC} = \mathbf{B}$ atrisināmību atkarībā no matricām $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ un $\mathbf{C}$.

6. NODAĻA

Vienkāršākās matricu faktorizācijas

6.1. Trijstūrveida matricu faktorizācijas

6.1.1. Diagonāla reizinātāja atdalīšana. Trijstūrveida matricu $\mathbf{A}$ sauc par *unitriangulāru,* ja tās galvenās digonāles elementi ir 0 vai 1. Augšēji/apakšēji unitriangulāru $m \times n$ matricu kopu apzīmē ar $\mathcal{UUT}(m,n,k)/\mathcal{LUT}(m,n,k)$.

Teorēma 6.1. *$\forall$ $\boldsymbol{A} \in \mathcal{UT}(m,n,k)$ var izteikt formā*

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{V}_1$,
(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}_2 \boldsymbol{D}_2$.

kur

- *$\boldsymbol{D}_i$ ir invertējamas diagonālas matricas,*
- *$\boldsymbol{V}_i \in \mathcal{UUT}(m,n,k)$.*

$\boldsymbol{A} \in GL(n,k) \implies$ visas matricas ($\boldsymbol{D}_i$ un $\boldsymbol{V}_i$) ir viennozīmīgi noteiktas.

PIERĀDĪJUMS Veicot tikai REP2 $\mathbf{A}$ var pārveidot par unitriangulāru matricu $\mathbf{V}_1 \implies \exists$ invertējama diagonāla matrica $\mathbf{D}'_1$:

$$\mathbf{D}'_1 \mathbf{A} = \mathbf{V}_1$$

Seko, ka $\mathbf{A} = \mathbf{D}'^{-1}_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{D}_1 \mathbf{V}_1$, kur $\mathbf{D}_1$ ir invertējama diagonāla matrica.

Izmantojot KEP2 var pierādīt faktorizāciju $\mathbf{A} = \mathbf{V}_2 \mathbf{D}_2$.

Ja $\mathbf{A}$ ir invertējama kvadrātveida matrica, tad REP2 un KEP2, kas ir minēti iepriekšējā apgalvojuma pierādījumā, ir noteikti vienozīmīgi, tāpēc diagonālās matricas ir noteiktas viennozīmīgi. ■

6.1.2. Rindu un kolonnu faktorizācija. Invertējamu augšēji/apakšēji trijstūrveida matricu sauc par *joslas matricu,* ja tikai vienā rindā vai vienā kolonnā ir nenulles elementi ārpus galvenās diagonāles.

Piemērs 6.2. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$ - joslas matrica.

Teorēma 6.3. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{UT}(n,n,k)$, $\sigma \in \Sigma_{n-1}$. Tad $\boldsymbol{A}$ var viennozīmīgi izteikt formā*

(1) *$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_{\sigma(1)} \boldsymbol{R}_{\sigma(2)} \ldots \boldsymbol{R}_{\sigma(n-1)}$, kur $\boldsymbol{R}_i$ ir joslas matrica ar ārpusdiagonāles nenulles elementiem tikai, iespējams, i-tajā rindā;*
(2) *$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}_{\sigma(1)} \boldsymbol{K}_{\sigma(2)} \ldots \boldsymbol{K}_{\sigma(n-1)}$, kur $\boldsymbol{K}_i$ ir joslas matrica ar ārpusdiagonāles nenulles elementiem tikai, iespējams, i-tajā kolonnā.*

PIERĀDĪJUMS
■

6.2. LU un LDU faktorizācijas

6.2.1. Faktorizācijas invertējamām matricām.

TEORĒMA 6.4. *$\boldsymbol{A} \in GL(n,k)$ var pārveidot rindu pakāpienveida formā izmantojot tikai REP2 un REP3 $\implies$ $\boldsymbol{A}$ ir viennozīmīgi izsakāma formā*

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$,
(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDV}$,

kur

- *$\boldsymbol{L}$ ir kvadrātveida apakšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles,*
- *$\boldsymbol{U}$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica,*
- *$\boldsymbol{D}$ ir kvadrātveida diagonāla matrica ar nenulles elementiem uz galvenās diagonāles,*
- *$\boldsymbol{V}$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles.*

PIERĀDĪJUMS Pārveidosim $\mathbf{A}$ par augšēji trijstūrveida matricu matricu saskaņā ar šādu algoritmu: sākot ar $\mathbf{A}$ veiksim REP3 "uz leju" virzoties no kreisās puses uz labo un pārveidosim $\mathbf{A}$ par augšēji trijstūrveida matricu $\mathbf{U}$. Seko, ka $\exists$ tādas REP3 elementārās matricas $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$, ka

$$\mathbf{R}_l ... \mathbf{R}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Apzīmēsim $\mathbf{R}_l ... \mathbf{R}_1$ ar $\mathbf{L}'$, redzam, ka $\mathbf{L}'$ ir apakšēji trijstūrveida matrica ar 1 uz diagonāles. Seko, ka $\mathbf{L}'\mathbf{A}' = \mathbf{U} \implies \mathbf{A} = \mathbf{L}'^{-1}\mathbf{U}$. Veiksim ar $\mathbf{U}$ REP2 tā, lai pārveidotajā matricā $\mathbf{V}$ uz galvenās diagonāles ir tikai vieninieki. Seko, ka $\mathbf{U} = \mathbf{DV}$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica.

Redzam, ka

- $\mathbf{L}'^{-1} = \mathbf{L}$ ir apakšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles,
- $\mathbf{U} = \mathbf{DV}$ ir augšēji trijstūrveida matrica.

Ir pierādīts, ka $\mathbf{A}$ var izteikt gan reizinājumā $\mathbf{LU}$, gan reizinājumā $\mathbf{LDU}$.

Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ var izteikt reizinājumā LU divos veidos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2.$$

$\implies$ $\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1 = \mathbf{U}_2\mathbf{U}_1^{-1}$. $\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1$ ir apakšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles, $\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1^{-1}$ ir augšēji trijstūrveida matrica $\implies$ tās abas ir vienības matricas $\implies$ $\begin{cases} \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2. \\ \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2. \end{cases}$

Pieņemsim, ka $\mathbf{U}$ ir izsakāma reizinājumā $\mathbf{DV}$ divos veidos:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}_1\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}_2\mathbf{V}_2.$$

$\implies$ $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{D}_1 = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1^{-1}$. $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{D}_1$ ir diagonāla matrica, $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1^{-1}$ ir augšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles $\implies$ tās abas ir vienības matricas $\implies$ $\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2. \\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2. \end{cases}$ ■

PIEMĒRS 6.5. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ par augšēji trijstūrveida matricu saskaņā ar teorēmas pierādījuma algoritmu:

$$\underbrace{\mathbf{R}_{23}(1)\mathbf{R}_{13}(1)\mathbf{R}_{12}(-2)}_{\mathbf{L}'}\mathbf{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 6 \end{array}\right]}_{\mathbf{U}}.$$

Invertējot matricas, iegūstam, ka

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}.$$

6.2.2. Faktorizācijas patvaļīgām matricām.

TEORĒMA 6.6. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k)$ var pārveidot rindu pakāpienveida formā izmantojot tikai REP2 un REP3 $\implies$ $\boldsymbol{A}$ ir izsakāma formā*

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$,
(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDV}$,

kur

- *$\boldsymbol{L}$ ir $m \times m$ apakšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles,*
- *$\boldsymbol{U}$ ir $m \times n$ pakāpienveida matrica,*
- *$\boldsymbol{D}$ ir $m \times m$ diagonāla matrica ar nenulles elementiem uz galvenās diagonāles,*
- *$\boldsymbol{V}$ ir $m \times n$ normalizēta pakāpienveida matrica.*

PIERĀDĪJUMS Pārveidosim $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā saskaņā ar šādu algoritmu.

(1) Apskatām pirmo kolonnu no kreisās malas, kas satur vismaz vienu nenulles elementu a_1 (pirmo galveno rūtiņu), ar REP3 "uz leju" anulējam visus nenulles elementus zem a_1, iegūsim matricu $\mathbf{L}_1\mathbf{A}$, pārejam uz apakšmatricu, ko iegūst izsvītrojot 1.rindu un 1.kolonnu.
(2) Atkārtojam soli (1) tik ilgi, kamēr apskatāmā apakšmatrica nav tukša, rezultātā iegūsim pakāpienveida matricu
$$\mathbf{U} = \mathbf{L}_s ... \mathbf{L}_1\mathbf{A},$$
kur $\mathbf{L}_i$ ir apakšēji trijstūrveida REP3 elementārās matricas. Apzīmēsim $\mathbf{L}_s ... \mathbf{L}_1$ ar $\mathbf{L}'$.

Seko, ka $\mathbf{L}'\mathbf{A} = \mathbf{A}' \implies \mathbf{A} = \mathbf{L}'^{-1}\mathbf{U}$. Redzam, ka $\mathbf{L}'^{-1} = \mathbf{L}$ ir apakšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles. Ir pierādīts, ka $\mathbf{A}$ var izteikt reizinājumā $\mathbf{LU}$. Veidot REP2 vai, citiem vārdiem sakot, faktorizējot $\mathbf{U}$ reizinājumā $\mathbf{DV}$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica un $\mathbf{V}$ - normalizēta pakāpienveida matrica, pierādam faktorizāciju $\mathbf{A} = \mathbf{LDV}$. ■

6.2.3. LU faktorizācijas lietojumi LVS risināšanā.

Dota kvadrātveida LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ var faktorizēt reizinājumā $\mathbf{LU}$. Šādā gadījumā LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ var risināt 2 soļos:

(1) atrisināt LVS $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, šādu LVS var atrisināt sākot ar y_1 un pēctecīgi atrodot $y_2, y_3, ...$,
(2) atrisināt LVS $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, arī šādu LVS var atrisināt pēctecīgi atrodot $x_1, x_2, ...$.

6.3. PLU un PLDV faktorizācija

6.3.1. Permutācijas matricas.

Matricu $\mathbf{P} \in \mathcal{M}at(n,k)$ sauksim par *permutācijas matricu,* ja tā ir vienāda ar REP3 elementāro matricu reizinājumu. Vienības matricas arī ir permutācijas matrica kā tukšais reizinājums.

PIEMĒRS 6.7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}$ - permutācijas matrica.

TEORĒMA 6.8.

(1) *$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ - permutācijas matricas $\implies$ $\boldsymbol{PQ}$ - permutācijas matrica.*
(2) *$\boldsymbol{P}$ - permutācijas matrica $\implies$ $\boldsymbol{P}^{-1}$ - permutācijas matrica.*

(3) $\boldsymbol{P}$ *- permutācijas matrica* $\iff$ *katra* $\boldsymbol{P}$ *rinda un kolonna satur tieši vienu nenulles elementu* 1.

PIERĀDĪJUMS Izmantosim zināmo faktu: $\mathbf{R}$ - REP1 elementārā matrica $\implies$ $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}$.

$$(1) \begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{R}_1...\mathbf{R}_s \\ \mathbf{Q} = \mathbf{R}_{s+1}...\mathbf{R}_t \end{cases} \implies \mathbf{PQ} = \mathbf{R}_1...\mathbf{R}_s\mathbf{R}_{s+1}...\mathbf{R}_t \text{ - permutācijas matrica.}$$

(2) $\mathbf{P} = \mathbf{R}_1...\mathbf{R}_s \implies \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{R}_s^{-1}...\mathbf{R}_1^{-1}$ - permutācijas matrica.

(3) Ja $\mathbf{P} = \mathbf{R}_1...\mathbf{R}_s$ ir permutācijas matrica, tad izmantojot indukciju ar parametru s, var pierādīt, ka $\mathbf{P}$ katra rinda un kolonna satur tikai vienu nenulles elementu 1.

Ja $\mathbf{P}$ katra rinda un kolonna satur tikai vienu nenulles elementu 1, tad konstruktīvi var izteikt $\mathbf{P}$ REP1 elementāro matricu reizinājuma veidā. ■

6.3.2. Faktorizācijas invertējamām kvadrātveida matricām.

TEORĒMA 6.9. $\forall$ $\boldsymbol{A} \in GL(n,k)$ *ir izsakāma formā*

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PLU}$,
(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PLDV}$,

kur

- $\boldsymbol{P}$ *ir permutācijas matrica,*
- $\boldsymbol{L}$ *ir kvadrātveida apakšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles,*
- $\boldsymbol{U}$ *ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica,*
- $\boldsymbol{D}$ *ir kvadrātveida diagonāla matrica ar nenulles elementiem uz galvenās diagonāles,*
- $\boldsymbol{V}$ *ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles.*

PIERĀDĪJUMS Pārveidosim $\mathbf{A}$ par apakšēji trijstūrveida matricu saskaņā ar šādu algoritmu.

(1) Apskatām pirmo kolonnu no kreisās malas, kas satur vismaz vienu nenulles elementu a_1, ar REP1 pārvietojam a_1 uz matricas 1.rindu, ar KEP2 pārvēršam a_1 par 1 (pirmā galvenā rūtiņa), ar KEP3 anulējam visus nenulles elementus pa labi no a_1, iegūsim matricu $\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1$, kurai 1.rindā un 1.kolonnā ir tikai viens nenulles elements, ievērosim, ka $\mathbf{U}_1$ ir augšēji trijstūrveida matrica, pārejam uz apakšmatricu, ko iegūst izsvītrojot 1.rindu un 1.kolonnu.
(2) Atkārtojam soli (1) tik ilgi, kamēr apskatāmā apakšmatrica nav tukša, rezultātā iegūsim matricu
$$\mathbf{L} = \mathbf{P}_l...\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1...\mathbf{U}_l,$$
kur $\mathbf{L}$ ir apakšēji trijstūrveida ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles, $\mathbf{P}_i$ ir 1.veida elementārās matricas, $\mathbf{U}_i$ ir augšēji trijstūrveida matricas. Apzīmēsim $\mathbf{P}_l...\mathbf{P}_1$ ar $\mathbf{P}'$, $\mathbf{U}_1...\mathbf{U}_l$ ar $\mathbf{U}'$.

Seko, ka $\mathbf{P}'^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U}'^{-1} = \mathbf{A}$ $\implies$ $\mathbf{A}$ ir izteikta formā $\mathbf{PLU}$. Izteiksim $\mathbf{U}$ reizinājumā $\mathbf{DV}$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica un $\mathbf{V}$ ir augšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles. Ir pierādīts, ka $\mathbf{A}$ var izteikt gan reizinājumā $\mathbf{PLU}$, gan reizinājumā $\mathbf{PLDU}$. ■

PIEZĪME 6.10. PLU un PDLU faktorizācijas nav noteiktas viennozīmīgi.

PIEMĒRS 6.11. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & -1 \\ \hline 2 & -4 & -3 \\ \hline 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ par augšēji trijstūrveida matricu saskaņā ar teorēmas pierādījuma algoritmu:

$$\underbrace{\mathbf{R}_{13}(-2)\mathbf{R}_{12}(-1)}_{\mathbf{L}'}\underbrace{\mathbf{R}_{23}}_{\mathbf{P}'}\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{K}_{12}(2)\mathbf{K}_{13}(1)\mathbf{K}_{23}(-3)\mathbf{K}_3(-1)}_{\mathbf{U}'} = \mathbf{E}_3.$$

Invertējot matricas, iegūstam, ka

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{V}} =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{\mathbf{U}}.$$

6.4. Bruā tipa faktorizācijas

6.4.1. Klasiskā Bruā (Bruhat) faktorizācija.

TEORĒMA 6.12. *$\forall$ $\boldsymbol{A} \in GL(n,k)$ ir izsakāma formā*

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{WPU}$,
(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{WPDV}$,

kur

- *$\boldsymbol{P}$ ir viennozīmīgi noteikta permutācijas matrica,*
- *$\boldsymbol{W}$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles,*
- *$\boldsymbol{U}$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica,*
- *$\boldsymbol{D}$ ir viennozīmīgi noteikta kvadrātveida diagonāla matrica,*
- *$\boldsymbol{V}$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica ar vieniniekiem uz galvenās diagonāles.*

PIERĀDĪJUMS Pārveidosim $\mathbf{A}$ par permutācijas matricu saskaņā ar šādu algoritmu.

(1) Pirmajā kolonnā no kreisās malas apskatām apakšējo nenulles elementu a_1 (pirmā galvenā rūtiņa), ar REP3 "uz augšu" anulējam visus nenulles elementus virs a_1, ar KEP3 "pa labi" anulējam visus nenulles elementus pa labi no a_1, ar KEP2 1.kolonnas pārveidojumu pārvēršam a_1 par 1, ar iegūsim matricu $\mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1$, kurai elementa a_1 rindā un 1.kolonnā ir tikai viens nenulles elements 1, ievērosim, ka $\mathbf{W}_1$ un $\mathbf{U}_1$ ir augšēji trijstūrveida matricas, $\mathbf{W}_1$ galvenā diagonāle satur tikai vieniniekus, pārejam uz apakšmatricu, ko iegūst izsvītrojot elementa a_1 rindu un 1.kolonnu,
(2) Atkārtojam soli (1) tik ilgi, kamēr apskatāmā apakšmatrica nav tukša, rezultātā iegūsim matricu

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}_l ... \mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1 ... \mathbf{U}_l,$$

kur $\mathbf{P}$ ir permutācijas matrica, $\mathbf{U}_i$ un $\mathbf{W}_i$ ir augšēji trijstūrveida matricas, $\forall\ i$ uz $\mathbf{W}_i$ galvenās diagonāles ir tikai vieninieki. Katrā solī apskatāmajā kolonnā eksistē nenulles elements, jo $\mathbf{A}$ ir invertējama matrica. Apzīmēsim $\mathbf{W}_l ... \mathbf{W}_1$ ar $\mathbf{W}'$, $\mathbf{U}_1 ... \mathbf{U}_l$ ar $\mathbf{U}'$.

Seko, ka $\mathbf{W}'\mathbf{A}\mathbf{U}' = \mathbf{P} \implies \mathbf{A}$ ir vēlamajā formā $\mathbf{WPU}$. Izteiksim augšēji trijstūrveida matricu $\mathbf{U}$ reizinājumā $\mathbf{DV}$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica un $\mathbf{V}$. Ir pierādīts, ka $\mathbf{A}$ var izteikt gan reizinājumā $\mathbf{WPU}$, gan reizinājumā $\mathbf{WPDV}$.

Jāpierāda matricu $\mathbf{P}$ un $\mathbf{D}$ viennozīmīgums. Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ ar REP "uz augšu" un ar KEP "pa labi" var pārveidot par permutācijas matricu 2 veidos:

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \mathbf{P}_1, \\ \mathbf{W}_2\mathbf{A}\mathbf{U}_2 = \mathbf{P}_2. \end{cases}$$

Seko, ka $\mathbf{W}\mathbf{P}_1\mathbf{U}' = \mathbf{P}_2$, kur $\mathbf{W}$, $\mathbf{U}'$ - augšēji trijstūrveida matricas ar nenulles elementiem uz galvenās diagonāles. Iegūstam, ka $\mathbf{W}\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2\mathbf{U}'^{-1} = \mathbf{P}_2\mathbf{U}$. Apskatīsim pirmo kolonnu ar indeksu j sākot no kreisās malas, kurās $\mathbf{P}_1$ un $\mathbf{P}_2$ atšķiras. Pieņemsim, ka $[\mathbf{P}_1]_{i_1 j} = 1$ un $[\mathbf{P}_2]_{i_2 j} = 1$. Ievērosim, ka pa kreisi no rūtiņām ar adresēm (i_1, j) un (i_2, j) abās matricās $\mathbf{P}_1$ un

$\mathbf{P}_2$ ir tikai nulles. Ja $i_1 < i_2$, tad $[\mathbf{WP}_1]_{i_2,j} = 0$, jo ar $\mathbf{P}_1$ tiek veikti REP2 un REP3 uz augšu. No otras puses $[\mathbf{P}_2\mathbf{U}]_{i_2,j} \neq 0$, jo ar $\mathbf{P}_2$ tiek veikti KEP2 vai KEP3 pa kreisi un nav ar ko anulēt elementu ar adresi (i_2, j). Ir iegūta pretruna $\implies$ $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$. Ja $i_1 > i_2$, tad $[\mathbf{WP}_1]_{i_1,j} \neq 0$, jo ar $\mathbf{P}_1$ tiek veikti REP2 un REP3 uz augšu. No otras puses $[\mathbf{P}_2\mathbf{U}]_{i_2,j} = 0$, jo ar $\mathbf{P}_2$ tiek veikti KEP2 vai KEP3 pa kreisi un nav ar ko padarīt elementu adresē (i_1, j) par atšķirīgu no 0. Atkal ir iegūta pretruna un ir pierādīts, ka $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$.

Pieņemsim, ka $\mathbf{U}_i^{-1} = \mathbf{D}_i\mathbf{V}_i$. $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 \implies diag(\mathbf{U}_1) = diag(\mathbf{U}_2) \implies \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$. ■

PIEMĒRS 6.13. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & -3 \\ \hline 2 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ par permutācijas matricu saskaņā ar teorēmas pierādījuma algoritmu:

$$\underbrace{\mathbf{R}_{13}(-2)\mathbf{R}_{21}(1)}_{\mathbf{W}'}\,\mathbf{A}\,\underbrace{\mathbf{K}_{12}(-1)\mathbf{K}_{13}(-2)\mathbf{K}_1(1/2)\mathbf{K}_{23}(-1)\mathbf{K}_3(-1)}_{\mathbf{U}'} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \mathbf{P}.$$

Invertējot matricas, iegūstam, ka

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{W}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{V}} =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{W}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{\mathbf{U}}$$

Šajā gadījumā Bruā faktorizācija nav noteikta viennozīmīgi, jo

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{W}_1} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{\mathbf{U}_1}.$$

6.4.2. Bruā faktorizācijas variācijas.

TEORĒMA 6.14. *$\forall\ \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir izsakāma formā*

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{U}_1$,
(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{U}_2$,
(3) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_3\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{L}_3$,
(4) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_4\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{T}_4$,

kur

- *$\boldsymbol{P}_i$ ir viennozīmīgi noteiktas permutācijas matricas,*
- *$\boldsymbol{W}_1$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matrica,*
- *$\boldsymbol{U}_i$ ir kvadrātveida augšēji trijstūrveida matricas,*
- *$\boldsymbol{L}_i$ ir kvadrātveida apakšēji trijstūrveida matrica,*
- *$\boldsymbol{T}_4$ ir kvadrātveida apakšēji trijstūrveida matrica.*

PIERĀDĪJUMS Katrā gadījumā var aprakstīt piemērotu algoritmu $\mathbf{A}$ pārveidošanai par permutācijas matricu. ■

6.5. Rangu faktorizācija

TEORĒMA 6.15. *$\forall$ $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k)$, $r(\boldsymbol{A}) = r$ ir izsakāma formā*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC},$$

kur $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}at(m,r,k)$ un $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}at(r,n,k)$.

PIERĀDĪJUMS Ar REP $\mathbf{A}$ var pārveidot rindu pakāpienveida formā - $\exists$ $\mathbf{R} \in GL(m,k)$:

$$\mathbf{RA} = \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0}_{m-r,n} \end{array}\right], \text{ kur } r(\mathbf{C}) = r \implies \mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}'.$$

Izteiksim $\mathbf{R}^{-1}$ bloku formā $\mathbf{R}^{-1} = [\mathbf{B}|\mathbf{J}]$, kur $\mathbf{B} \in \mathcal{M}at(m,r,k)$. Redzam, ka $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ un matricām $\mathbf{B}$ un $\mathbf{C}$ ir vēlamie izmēri. ■

6.6. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 6.16. Faktorizēt dotās invertējamās matricas LU un LDV formā.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$,

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & -2 \\ \hline -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 6.17. Faktorizēt dotās matricas LU un LDV formā.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \end{array}\right]$,

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & -2 \\ \hline 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 6.18. Faktorizēt dotās matricas PLU un $PLDV$ formā.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right]$,

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 & -2 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 6.19. Atrast piemēru, kas parāda, ka PLU faktorizācija nav viennozīmīgi noteikta.

VINGRINĀJUMS 6.20. Faktorizēt dotās matricas Bruā formā WLU un $WPDV$.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right]$,

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 & -2 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 6.21. Faktorizēt dotās matricas rangu faktorizācijas formā.

(1) $\left[\begin{array}{c|c|c} -2 & -3 & -1 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 8 & 12 & 4 \end{array}\right]$.

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 2 \\ \hline -1 & 8 & 9 \\ \hline -3 & 9 & 7 \end{array}\right]$.

(3) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$

7. NODAĻA

Matricas determinants

Kvadrātveida matricām var definēt un pētīt funkciju, kas kalpo kā invertējamības indikators. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ var definēt *determinanta* funkciju - polinomiālu funkciju no matricas elementiem:

$$\det : Mat(n,k) \longrightarrow\ k.$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \det(\mathbf{A}).$$

Determinanta svarīgākā īpašība ir šāda: $\det(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A}$ ir neinvertējama matrica.

7.1. Definīcija

Determinanta definēšanā ir vismaz trīs pieejas:

- klasiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas parādās izteiksmju saucējos, risinot kvadrātveida LVS.
- aksiomātiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas apmierina noteiktas īpašības,
- ģeometriskā pieeja - determinants tiek definēts kā tāda daudzdimensiju paralēlskaldņa "tilpums", kura šķautņu galapunktu koordinātes ir matricas rindas vai kolonnas.

7.1.1. Vēsturiskā pieeja. Risinot kvadrātveida LVS, var ievērot, ka nezināmie ir racionālas funkcijas no sistēmas koeficientiem un brīvajiem locekļiem. Apskatīsim nelielu izmēru LVS.

7.1.1.1. $n = 1$.

Apskatīsim LVS $\{\ a_{11}X_1 = b_1$. Tai $\exists$ atrisinājums, ja $a_{11} \neq 0$: $X_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$. Varam definēt

$$\det \left[\ a_{11}\ \right] = a_{11} \implies X_1 = \frac{\det[b_1]}{\det[a_{11}]}.$$

7.1.1.2. $n = 2$.

Risināsim LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2. \end{cases}$. Pārveidosim paplašināto matricu pakāpienveida formā:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a_{12}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a_{12}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ \hline 0 & a_{22} - a_{21}(a_{12}/a_{11}) & b_2 - a_{21}(b_1/a_{11}) \end{array}\right].$$

Iegūsim atrisinājumu

$$X_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, X_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$\exists$ tieši viens atrisinājums, ja $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Varam definēt

$$\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \implies$$

$$X_1 = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} b_1 & a_{12} \\ \hline b_2 & a_{22} \end{array}\right]}{\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right]}, X_2 = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & b_1 \\ \hline a_{21} & b_2 \end{array}\right]}{\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right]}$$

Piemērs 7.1. $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right] = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3.$

7.1.1.3. $n = 3$.
Ja atkārtotu risinājumu 3×3 LVS, iegūtu šādu rezultātu:

$$X_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \text{ kur}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

PIEMĒRS 7.2. $\det \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & -1 \end{array}\right] = 2{\cdot}1{\cdot}(-1) + (-1){\cdot}2{\cdot}4 + 0{\cdot}3{\cdot}2 - 0{\cdot}1{\cdot}4 - (-1){\cdot}3{\cdot}(-1) - 2{\cdot}2{\cdot}2 = -21.$

Šādā veidā funkciju det var definēt visiem n.

7.1.2. Determinanta definējošo īpašību pamatojums.

7.1.2.1. *Pamatapsvērumi.*
Ņemot vērā visu LVS risināšanas un matricu algebras pieredzi, var minēt šādus apsvērumus kvadrātveida matricas $\mathbf{A}$ "determinanta" funkcijas definēšanai:

- "determinanta" funkcijas vērtībām jāsakrīt ar saucēju funkcijām nezināmo formulās vispārīgajā gadījumā:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \cdots \\ \hline z_n \end{array}\right],$$

- LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ir viennozīmīgi atrisināma $\iff$ $\mathbf{A}$ ir invertējama, tāpēc var pieprasīt šādu īpašību

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \text{ ir invertējama.}$$

7.1.2.2. *Multiplikativitāte.*
Kādai būtu jābūt saistībai starp $\det(\mathbf{AB})$, $\det(\mathbf{A})$ un $\det(\mathbf{B})$?

Sistēmu $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kur $\mathbf{AB}$ ir invertējama, var risināt divos veidos:

- vienā solī, tad nezināmo formulās saucējs būs $\det(\mathbf{AB})$;
- divos soļos:
  pirmais solis- $\mathbf{ABx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) \implies$ veicot nezināmo substitūciju $\mathbf{x} \dashrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Bx}$ iegūsim sistēmu

$$\begin{cases} \mathbf{Ay} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Bx} \end{cases},$$

  atrisinot vienādojumu attiecībā uz $\mathbf{y}$, saucējos iegūsim $\det(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline \cdots \\ \hline y_n \end{array}\right],$$

  otrais solis-
  risinot attiecībā uz $\mathbf{x}$ vienādojumu

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{y} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline \cdots \\ \hline y_n \end{array}\right],$$

  iegūsim

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \dots \\ \hline z_n \end{array} \right].$$

Var pieņemt, ka jāizpildās sakarībai $\frac{1}{\det \mathbf{AB}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \frac{1}{\det \mathbf{B}}$, no kuras seko sakarība $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$. Citos terminos multiplikativitātes īpašība nozīmē to, ka det ir pusgrupu homomorfisms $(\mathcal{M}at(n,k), \times) \to (k, \times)$.

7.1.3. Speciālgadījumi.

7.1.3.1. *Mazas n vērtības.*

Mazām n vērtībām var pieņemt šādas det definīcijas:

- $n = 1 \implies \det \left[\ a_{11} \ \right] = a_{11}$;
- $n = 2 \implies \det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
- $n = 3 \implies$

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

7.1.3.2. *Neinvertējamas matricas.*

Pierādīsim, ka no determinanta multiplikativitātes seko tas, ka neinvertējamām matricām determinants ir vienāds ar 0.

Nulles matrica

$\forall\ \mathbf{M}\ \mathbf{M0}_n = \mathbf{0}_n \implies \det(\mathbf{M0}_n) = \det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{0}_n) = \det(\mathbf{0}_n) \implies \det(\mathbf{0}_n) = 0$ vai $\det(\mathbf{M}) = 1 \implies \det(\mathbf{0}_n) = 0$.

Nilpotentas matricas

$\mathbf{N}^a = \mathbf{0} \implies (\det(\mathbf{N}))^a = 0 \implies \det(\mathbf{N}) = 0$.

Neinvertējamas matricas

Jebkuru neinvertējamu matricu $\mathbf{M}$ ar REP un KEP var pārveidot normālā formā $\mathbf{B}$: $\mathbf{M} = \mathbf{RBK}$. Jebkuru normālu neinvertējamu matricu var izteikt divu nilpotentu matricu reizinājuma veidā:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{0}_{r,d} \\ \hline \mathbf{0}_{d,r} & \mathbf{0}_{d,d} \end{array} \right] = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{J}_r^T & \mathbf{0}_{r+1,d-1} \\ \hline \mathbf{0}_{d-1,r+1} & \mathbf{0}_{d-1,d-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{J}_r & \mathbf{0}_{r+1,d-1} \\ \hline \mathbf{0}_{d-1,r+1} & \mathbf{0}_{d-1,d-1} \end{array} \right]$$

kur $\mathbf{J}_r = \sum_{i=2}^{r+1} \mathbf{E}_{i,i-1}$ - nilpotenta $(r+1) \times (r+1)$-matrica.

Seko, ka $\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{K}) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{J}) \det(\mathbf{J}^T) \det(\mathbf{K}) = 0$.

7.1.3.3. *Elementārās matricas.*

Atradīsim pieņemamas vērtības elementāro matricu determinantiem, uzskatot, ka determinants ir multiplikatīva funkcija.

Vienības matrica

$\forall\ \mathbf{M}\ \mathbf{ME}_n = \mathbf{M} \implies \det(\mathbf{ME}_n) = \det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{M}) \implies \det(\mathbf{E}_n) = 1$ vai $\det(\mathbf{M}) = 0 \implies \det(\mathbf{E}_n) = 1 \implies \Big(\mathbf{M} \in GL(n,k) \implies \det(\mathbf{M}) \neq 0\Big)$.

Pirmā veida elementārā pārveidojuma matrica

$\mathbf{R}_{pq}^2 = \mathbf{E}_n \implies \det(\mathbf{R}_{pq})^2 = \det(\mathbf{E}_n) = 1 \implies \det(\mathbf{R}_{pq}) \in \{1, -1\}$.

PIEZĪME 7.3. Apskatot 2×2 un 3×3 matricu gadījumu, redzam, ka jāņem vērtība -1.

Otrā veida elementārā pārveidojuma matrica
Apzīmēsim $\det(\mathbf{R}_p(\lambda))$ ar $f(\lambda)$.

$$\begin{cases} \mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{R}_p(1/\lambda) = \mathbf{E}_n \\ \mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{R}_p(\mu) = \mathbf{R}_p(\lambda\mu) \end{cases} \Longrightarrow f(\lambda)f(\mu) = f(\lambda\mu).$$

PIEZĪME 7.4. Der jebkura pakāpes funkcija $f(\lambda) = \lambda^m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Apskatot 2×2, 3×3 un trijstūrveida matricas, redzam, ka jādefinē $f(\lambda) = \lambda$.

Trešā veida elementārā pārveidojuma matrica
Apzīmēsim $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda))$ ar $g(\lambda)$.
$\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{R}_{pq}(\mu) = \mathbf{R}_p(\lambda + \mu) \Longrightarrow g(\lambda)g(\mu) = g(\lambda + \mu)$.

PIEZĪME 7.5. Der jebkura eksponentfunkcija funkcija $g(\lambda) = a^\lambda$, $a > 0$. Apskatot trijstūrveida matricas, redzam, ka jāņem $a = 1 \Longrightarrow g(\lambda) = 1$.

7.1.4. Determinanta definīcija. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ definēsim $n \times n$ matricu determinanta funkciju

$$\det : \mathcal{M}at(n, k) \longrightarrow k$$

ar šādiem nosacījumiem:

(1) $\mathbf{A}$ nav invertējama $\Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$
(2) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$,
(3) $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,
(4) $\det(\mathbf{R}_{pq}) = -1$, $\forall\, p, q$,
(5) $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)) = \lambda$, $\forall\, p$, $\forall\, \lambda \in k$,
(6) $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)) = 1$, $\forall\, p, q$, $\forall\, \lambda \in k$.

$\det \mathbf{A}$ var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

- $\mathbf{A}$ nav invertējama $\Longrightarrow \det \mathbf{A} = 0$;
- $\mathbf{A}$ ir invertējama, $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ ir elementāra matrica $\Longrightarrow$

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{P}_1 ... \det \mathbf{P}_l.$$

Lai šāda definīcija būtu pamatota un ērta lietošanā, ir

(1) jāpierāda, ka definīcija ir korekta: ja matricu var izteikt kā elementāro matricu reizinājumu divos dažādos veidos, tad determinants no tā nav atkarīgs,
(2) jāatrod algoritms determinanta aprēķināšanai neizmantojot zināšanas par matricas invertējamību un sadalīšanu elementāro matricu reizinājumā.

PIEMĒRS 7.6. $\mathbf{E} = \mathbf{R}_{pq}\mathbf{R}_{pq}$,$1 = (-1)(-1) = 1$.

TEORĒMA 7.7. *$\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{Q}_i$ - elementāras matricas.*

$$\boldsymbol{P}_1 ... \boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{Q}_1 ... \boldsymbol{Q}_v \Longrightarrow \det(\boldsymbol{P}_1) ... \det(\boldsymbol{P}_u) = \det(\boldsymbol{Q}_1) ... \det(\boldsymbol{Q}_v).$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $n \times n$ matricu $\mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_u = \mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_v$ ar $\mathbf{A}$.

Izmantojot tikai REP3 $\mathbf{A}$ var pārveidot par $\mathbf{R}_n(\lambda)$ saskaņā ar algoritmu, kas ir līdzīgs Gausa metodes algoritmam ar to atšķirību, ka tiek izmantoti tikai REP3:

(1) apskatām 1.kolonnu, tā satur vismaz vienu nenulles elementu, ar 3.veida REP panākam, ka 1.kolonnā ir tikai viens nenulles elements 1 adresē $(1, 1)$,
(2) apskatām 2.kolonnu, tā satur vismaz divus nenulles elementu, ar 3.veida REP panākam, ka 2.kolonnā ir tikai viens nenulles elements 1 adresē $(2, 2)$,

(3) ...,
(4) apskatām $n-1$-to kolonnu, tā satur vismaz $n-1$ nenulles elementu, ar 3.veida REP panākam, ka $n-1$-ajā kolonnā ir tikai viens nenulles elements 1 adresē $(n-1, n-1)$,
(5) apskatām n-to kolonnu, tā satur nenulles elementu λ adresē (n, n).

Seko, ka eksistē tādas EP matricas $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$, ka

$$\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_L \mathbf{A} = \mathbf{R}_n(\lambda).$$

■

7.2. Determinanta pamatīpašības

TEORĒMA 7.8.

(1) *Mainot vietām divas matricas rindas vai kolonnas, matricas determinants maina zīmi.*
(2) *Ja matricā ir divas vienādas rindas vai kolonnas, tad matricas determinants ir vienāds ar* 0.
(3) *Reizinot matricas rindu vai kolonnu ar* λ, *matricas determinants jāreizina ar* λ.
(4) *Pieskaitot matricas rindai vai kolonnai citu rindu vai kolonnu, reizinātu ar* λ, *determinants nemainās.*
(5) *Trijstūrveida matricas determinants ir vienāds ar galvenās diagonāles elementu reizinājumu.*
(6) $\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A}$.
(7) $\det \boldsymbol{A}^H = \overline{\det \boldsymbol{A}}$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\det(\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{R}_{pq}) \det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq})$.

2. $\mathbf{A}$ satur divas vienādas rindas ar indeksiem p un q $\Longrightarrow$ $\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ $\Longrightarrow$ $-\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$.

3. $\det\Big(\mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{A}\Big) = \det(\mathbf{R}_p(\lambda)) \det(\mathbf{A}) = \lambda \det(\mathbf{A}) = \det\Big(\mathbf{A}\mathbf{R}_p(\lambda)\Big)$.

4. $\det\Big(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{A}\Big) = \det(\mathbf{R}_p(\lambda)) \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = \det\Big(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\Big)$.

5. Apskatīsim augšēji trijstūrveida matricu

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{array}\right].$$

$\exists\ i : a_{ii} = 0 \Longrightarrow$ galveno rūtiņu skaits $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā ir mazāks kā $n \Longrightarrow r(\mathbf{A}) < n \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Pieņemsim, ka $\forall\ i : a_{ii} \neq 0$. Veiksim REP virkni $\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})$, $\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})$,...,$\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})$. Iegūsim augšēji trijstūrveida matricu $\mathbf{A}'$, kurai uz galvenās diagonāles ir 1:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ \hline 0 & 1 & ... & a'_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right].$$

Redzam, ka

$$\det(\mathbf{A}') = \det\Big(\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})...\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})\mathbf{A}\Big) =$$

$$\det\Big(\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})\Big)\det\Big(\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})\Big)...\det\Big(\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})\Big)\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}}...\frac{1}{a_{nn}}\det(\mathbf{A}).$$

Seko, ka $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{nn}\det(\mathbf{A}')$. Veicot ar $\mathbf{A}'$ KEP "no kreisās puses uz labo" sākot ar pēdējo rindu, iegūsim vienības matricu:

$\mathbf{A}'\mathbf{K}_{n-1}\mathbf{K}_{n-2}...\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}_n \implies \det(\mathbf{A}')\det(\mathbf{K}_{n-1})\det(\mathbf{K}_{n-2})...\det(\mathbf{K}_1) = \det(\mathbf{E}_n) = 1 \implies$ $\det(\mathbf{A}') = 1 \implies \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

6. $\mathbf{A} \notin GL(n,k) \iff \mathbf{A}^T \notin GL(n,k) \implies \det(\mathbf{A}) = 0 \iff \det(\mathbf{A}^T) = 0$.

$\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}_1...\mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ ir elementārās matricas $\implies \mathbf{A}^T = \mathbf{P}_l^T...\mathbf{P}_1^T \implies$ $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T)...\det(\mathbf{P}_1^T)$.

Ar visu gadījumu pārbaudi var pārliecināties, ka $\forall$ elementārai matricai $\mathbf{P}$, izpildās $\det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^T) \implies$

$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T)...\det(\mathbf{P}_1^T) = \det(\mathbf{P}_l)...\det(\mathbf{P}_1) = \det(\mathbf{A})$.

7. Jāizmanto šādas kompleksās saistīšanas īpašības: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. ■

7.3. Determinanta aprēķināšanas algoritmi

7.3.1. Mazu izmēru matricas. Ja $n \in \{1,2,3\}$, tad $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ determinantu var atrast izmantojot zināmās formulas.

Piemērs 7.9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\det(\mathbf{A}) = 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot0 + 0\cdot2\cdot2 - 0\cdot1\cdot0 - 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 = -7$.

7.3.2. Triangulācijas algoritms. $\mathbf{A}$ - $n \times n$ matrica.

$\det(\mathbf{A})$ var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

(1) ar REP un KEP palīdzību pārveidot $\mathbf{A}$ trijstūrveida formā:
$$\mathbf{A} \to \mathbf{RAK} = \mathbf{T};$$
(2) atrast $\det(\mathbf{T}) = t_{11}t_{22}...t_{nn}$;
(3) izmantojot vienādību $\det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{R})\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{K})$ atrast
$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{T})}{\det(\mathbf{R})\det(\mathbf{K})}.$$

7.4. Vingrinājumi

Vingrinājums 7.10. Atrast 2×2 matricu determinantus izmantojot summu formulas.

(1) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3+2i & -4i \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & xy \end{bmatrix}$.

Vingrinājums 7.11. Atrast 3×3 matricu determinantus izmantojot summu formulas.

(1) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \\ 8 & 7 & -8 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$.

VINGRINĀJUMS 7.12. Atrast matricu determinantus izmantojot triangulācijas algoritmu.

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

VINGRINĀJUMS 7.13. Atrast matricu determinantus.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ t & 0 & y & 0 \\ 0 & u & 0 & z \\ 0 & 0 & v & 0 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} a_n & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & 0 & ... & ... & x & -1 \\ a_0 & 0 & ... & ... & 0 & x \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & -x \\ 1 & 1 & ... & -x & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & -x & ... & 1 & 1 \\ -x & 1 & ... & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

VINGRINĀJUMS 7.14. Kāda var būt 3×3 matricas determinanta maksimālā vērtība, ja matricas elementi pieder kopai

(1) $\{0, 1\}$;
(2) $\{-1, 1\}$.

VINGRINĀJUMS 7.15. Kvadrātveida matricai $\mathbf{A}$ visi elementi ir ± 1. Pierādīt, ka $\det(\mathbf{A})$ ir pāra skaitlis.

VINGRINĀJUMS 7.16. Kvadrātveida matricu $\mathbf{A}$ par *pseido-augšēji (apakšēji) trijstūrveida* matricu, ja visie elementi zem (virs) blakusdiagonāles ir vienādi ar 0. Izteikt $\det(\mathbf{A})$ kā funkciju no blakusdiagonāles elementiem.

VINGRINĀJUMS 7.17. Ar $n \times n$ matricu tiek veikti šādi pārveidojumi:

(1) simetrija attiecībā uz blakusdiagonāli,
(2) simetrijas attiecībā uz pretējo malu viduslīnijām,
(3) rotācijas par $\frac{\pi}{2}$ radiāniem.

Kā mainās matricas determinants katrā gadījumā ?

VINGRINĀJUMS 7.18. $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{B}$ atšķiras ne vairāk kā vienā rindā vai kolonnā. Pierādīt, ka $\det(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = (\lambda + \mu)^{n-1}(\lambda \det(\mathbf{A}) + \mu \det(\mathbf{B}))$.

VINGRINĀJUMS 7.19. Atrast matricu determinantus.

(1) $$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1+x_1 & 1+x_1^2 & ... & 1+x_1^n \\ \hline 1+x_2 & 1+x_2^2 & ... & 1+x_2^n \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline 1+x_n & 1+x_n^2 & ... & 1+x_n^n \end{array}\right];$$

(2) $$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & x & ... & x^{n-1} \\ \hline x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-2} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline x & x^2 & ... & 1 \end{array}\right].$$

VINGRINĀJUMS 7.20. Kvadrātveida matricai $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ izpildās nosacījumi $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i \in \{1, ..., n\}$ Pierādīt, ka $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

8. NODAĻA

Determinanta īpašības un lietojumi

8.1. Definīcijas korektuma pierādījums

8.1.1. Determinanta funkcijas vienīgums.

TEORĒMA 8.1. *Eksistē ne vairāk kā viena funkcija* det, *kas apmierina definīcijas aksiomas.*

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{A} \notin GL(n,k) \implies \det(\mathbf{A}) = 0$. $\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ - elementāras matricas $\implies \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}_1) ... \det(\mathbf{P}_l)$ - viennozīmīgi noteikts skaitlis. ■

8.1.2. Kolonna ar vienu nenulles elementu. Ar ko ir vienāds determinants, ja matricai kādā rindā vai kolonnā ir tikai viens nenulles elements?

TEORĒMA 8.2. $\det \boldsymbol{A} = \det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{r}_1 \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}' \end{array}\right] = a_{11} \det \boldsymbol{A}'$.

PIERĀDĪJUMS
$a_{11} = 0 \implies \det \mathbf{A} = 0 = 0 \cdot \det \mathbf{A}'$.

$a_{11} = 0 \implies$ var veikt šādus elementāros pārveidojumus:
(1) ar a_{11} anulēt visu bloku $\mathbf{r}_1$, bloks $\mathbf{A}'$ neizmainīsies,
(2) pārveidot bloku $\mathbf{A}'$ trijstūrveida formā neaiztiekot pirmo rindu un pirmo kolonnu.
Pēc šiem pārveidojumiem iegūsim matricas

$$\begin{cases} \mathbf{RAK} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{array}\right] \\ \mathbf{R}'\mathbf{A}'\mathbf{K}' = \mathbf{T}, \end{cases}$$

kur $\mathbf{R}'$, $\mathbf{K}'$ ir $\mathbf{R}$,$\mathbf{K}$ sašaurinājumi uz bloku $\mathbf{A}'$ $\implies$

$$\begin{cases} \det \mathbf{R} = \det \mathbf{R}' \\ \det \mathbf{K} = \det \mathbf{K}' \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \det \mathbf{R} \det \mathbf{A} \det \mathbf{K} = a_{11} \det \mathbf{T} \\ \det \mathbf{R} \det \mathbf{A}' \det \mathbf{K} = \det \mathbf{T} \end{cases} \implies \det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}'. \blacksquare$$

PIEZĪME 8.3. No īpašības $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ seko analoģisks apgalvojums matricai $\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]$.

8.1.3. Viena matricas elementa izmaiņas iespaids uz determinantu. Kā mainās determinants, ja mainās tieši viens elements matricā?

TEORĒMA 8.4. *Dota* $n \times n$ *matrica* $\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{r}_1 \\ \hline \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{A}' \end{array}\right]$. *Tad*

$$\det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11}+b & \boldsymbol{r}_1 \\ \hline \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{A}' \end{array}\right]}_{\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}_{11}} = \det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{r}_1 \\ \hline \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{A}' \end{array}\right]}_{\boldsymbol{A}} + \det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b & \boldsymbol{r}_1 \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}' \end{array}\right]}_{\boldsymbol{B}}.$$

PIERĀDĪJUMS
Ar matricām $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}$ un $\mathbf{B}$ veiksim vienu un to pašu elementāro pārveidojumu virkni:

(1) bloku $\mathbf{A}'$ pārveidosim normālajā formā neaiztiekot pirmo rindu un pirmo kolonnu, iegūsim matricas

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & * & * \\ \hline * & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11}+b & * & * \\ \hline * & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} b & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{B}}$$

(2) izmantojot vienības matricas bloku $\mathbf{E}$ ar 3.veida pārveidojumiem anulēsim daļu no pirmās kolonnas, iegūsim matricas

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11}+c & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11}+b+c & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}}.$$

$\mathbf{k}'$ garums ir vismaz 2 $\Longrightarrow$ $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}) = \det \mathbf{B} = 0$ $\Longrightarrow$ apgalvojums ir patiess.

<u>$\mathbf{k}'$ garums ir 0</u> $\Longrightarrow$ esam ieguvuši matricas

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11}+c & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11}+b+c & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{B}} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \det \mathbf{A} = (a_{11}+c)q \\ \det(\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}) = (a_{11}+b+c)q \\ \det \mathbf{B} = bq \end{cases} \Longrightarrow \det(\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}. \blacksquare$$

8.1.4. Determinanta rekursīvā definēšana. Dota matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Apzīmēsim ar $\mathbf{A}_{ij}$ matricu, ko iegūst no $\mathbf{A}$ izsvītrojot i-to rindu un j-to kolonnu.

PIEMĒRS 8.5. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 4 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

TEORĒMA 8.6. *Dota $n \times n$ matrica $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det \boldsymbol{A}_{i1}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. $\blacksquare$

PIEZĪME 8.7. Iepriekšējā teorēma ļauj definēt determinantu *rekursīvi* - sākot no 1×1 līdz jebkuram izmēram. Var pārbaudīt, ka 2×2 un 3×3 gadījumos iegūsim zināmās determinanta definīcijas.

PIEMĒRS 8.8. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \det[a_{22}] - a_{21} \det[a_{12}] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

TEORĒMA 8.9. *Determinanta funkcija ir definēta korekti.*

PIERĀDĪJUMS Determinanta funkcija ir noteikta viennozīmīgi (ja eksistē). Var pārbaudīt, ka izmantojot rekursīvo definīciju elementāro matricu determinantu vērtības sakrīt ar definētajām vērtībam.

Determinanta rekursīvā definīcija definē vienu funkciju, kas apmierina pirmo definīciju un nav atkarība no matricas izteikšanas elementāro matricu reizinājumā $\Longrightarrow$ sākotnējā definīcija arī ir korekta. ■

8.1.5. Izvirzījums pēc rindas vai kolonnas.

TEORĒMA 8.10. *(Laplasa izvirzījuma formulas)*

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{j\text{-tās kolonnas izvirzījums}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{i\text{-tās rindas izvirzījums}}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ■

PIEMĒRS 8.11. Atradīsim determinantu izvirzot pēc 2.rindas:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} = (-1)1\cdot\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 0\cdot ... + (-1)4\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = -18.$$

TEORĒMA 8.12. *(izvirzījuma ortogonalitātes īpašība)*

$$(1)\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ik})\Big)}_{\text{kolonnas izvirzījums}} = 0,\ k \neq j.$$

$$(2)\ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{kj})\Big)}_{\text{rindas izvirzījums}} = 0,\ k \neq i.$$

PIERĀDĪJUMS
1. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc j-tās kolonnas, kurai j-tā un k-tā kolonnas ir vienādas.

2. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc i-tās rindas, kurai i-tā un k-tā rindas ir vienādas. ■

8.1.6. Determinanta linearitāte pēc rindām un kolonnām.

TEORĒMA 8.13. *Determinants ir lineāra matricas rindu un kolonnu funkcija.*
PIERĀDĪJUMS
■

8.1.7. Determinanta kombinatoriskā definīcija.

σ - n elementu kopas $\{1,2,...,n\}$ permutācija - $\sigma \in \Sigma_n$. Pieņemsim, ka σ sadalījums ciklos satur m ciklus. Lielumu $d(\sigma) = n - m$ sauc par σ *dekrementu.* Lielumu

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)} = (-1)^{n-m}$$

sauc par σ *paritāti.*

TEORĒMA 8.14. $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. *Tad*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ■

8.1.8. Determinanta grafiskā interpretācija.

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$, konstruēsim grafu $\Gamma_{\mathbf{A}}$. Par $\Gamma_{\mathbf{A}}$ *pāru sakārtojumu* sauksim tādu $\Gamma_{\mathbf{A}}$ šķautņu kopas apakškopu, kuras sākum

PIEMĒRS 8.15. a

8.1.9. Binet-Cauchy formula.

8.1.9.1. *Vienkāršie gadījumi.*

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,m} \implies \mathbf{AB} = [c_{ij}]_{m,m}$. Ko var pateikt par $\det \mathbf{AB}$?

TEORĒMA 8.16.

(1) $m = n \implies \det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$.
(2) $m > n \implies \det \boldsymbol{AB} = 0$.

PIERĀDĪJUMS

1. Determinanta multiplikatīvā īpašība.

2. $\mathbf{AB}$ ir $m \times m$ matrica.

Var pierādīt, ka $r(\mathbf{AB}) \leq \min(m,n) = n < m \implies \det \mathbf{AB} = 0$. ■

8.1.9.2. *Netriviālais gadījums.*

$S \subseteq \{1,2,...,n\}$, $|S| = m$. Definēsim

- $\mathbf{A}_S$ kā matricu, kas ir iegūta no $\mathbf{A}$ atstājot tikai kolonnas ar indeksiem no kopas S,
- $\mathbf{B}_S$ kā matricu, kas ir iegūta no $\mathbf{B}$ atstājot tikai rindas ar indeksiem no kopas S,

PIEMĒRS 8.17. $\mathbf{A} = [2|3|4]$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 2 \\ \hline 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = [24]$,

$\det \mathbf{AB} = \det[2]\det[-1] + \det[3]\det[2] + \det[4]\det[5] = 24.$

TEORĒMA 8.18.

$$\det \boldsymbol{AB} = \sum_{S\subseteq\{1,...,n\}} \det \boldsymbol{A}_S \det \boldsymbol{B}_S.$$

PIERĀDĪJUMS

■

8.2. Determinanta lietojumi

8.2.1. Matricas invertējamība.

Atcerēsimies deteminanta pamatīpašību: $\mathbf{A} \in GL(n,k) \iff \det \mathbf{A} \neq 0$.

TEORĒMA 8.19. $\boldsymbol{A} \in GL(n,k) \implies \det \boldsymbol{A}^{-1} = \det(\boldsymbol{A})^{-1}$.

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \implies \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 1 \implies \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1}$. ■

8.2.2. Inversās matricas atrašana. $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Definēsim *algebriskā papildinājuma* matricu

$$\mathbf{A}^P = adj(\mathbf{A}) = [(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}]_{n,n}.$$

PIEMĒRS 8.20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

TEORĒMA 8.21.
(1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^P = \boldsymbol{A}^P \cdot \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E}_n$.
(2) $\det \boldsymbol{A} \neq 0 \implies \boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^P$.

PIERĀDĪJUMS
1. $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^P]_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}[\mathbf{A}^P]_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+j} \det \mathbf{A}_{jk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ja } i = j \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$
2. No pirmā apgalvojuma seko $\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^P\right) = \mathbf{E}_n$.■

8.2.3. Krāmera formulas.

TEORĒMA 8.22. *(Krāmera formulas)* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ - kvadrātveida LVS, $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{A}_j$ - matricu, kuru iegūst no $\mathbf{A}$ aizvietojot j-to kolonnu ar $\mathbf{b}$. Tad

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

PIERĀDĪJUMS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\mathbf{A}^P)\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum\nolimits_{i=1} [\mathbf{A}^P]_{ij}\mathbf{b}_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \underbrace{\sum_{i=1} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}\mathbf{b}_j}_{\mathbf{A}_i \text{ izvirzījums } i\text{-tajā kolonnā}}.$$

■

PIEMĒRS 8.23. $\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & = 4 \\ X_1 & +5X_2 & = 7 \end{cases}$, $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 1 & 5 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c} 4 & -1 \\ \hline 7 & 5 \end{array}\right]$,$\mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 1 & 7 \end{array}\right]$,
$\begin{cases} X_1 = \frac{27}{11} \\ X_2 = \frac{10}{11}. \end{cases}$.

8.2.4. Ģeometriskā interpretācija. 2×2 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralelograma laukumu.

Doti 2 vektori $\vec{v} = (x, y)$ un $\vec{u} = (x', y')$. Tad paralelograma, kas ir "uzvilkts" uz šiem vektoriem, laukums $S = \left| \det \left[\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline x' & y' \end{array}\right] \right|$.

3×3 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralēlskaldņa tilpumu.

8.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 8.24. $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{B}$ atšķiras ne vairāk kā vienā rindā vai kolonnā. Pierādīt, ka $\det(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = (\lambda + \mu)^{n-1}(\lambda \det(\mathbf{A}) + \mu \det(\mathbf{B}))$.

VINGRINĀJUMS 8.25. Atrast matricu determinantus.

(1) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1+x_1 & 1+x_1^2 & ... & 1+x_1^n \\ \hline 1+x_2 & 1+x_2^2 & ... & 1+x_2^n \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline 1+x_n & 1+x_n^2 & ... & 1+x_n^n \end{array}\right]$;

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & x & ... & x^{n-1} \\ \hline x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-2} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline x & x^2 & ... & 1 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 8.26. $n \times n$ matricai $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ izpildās nosacījumi $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i \in \{1, ..., n\}$ Pierādīt, ka $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

VINGRINĀJUMS 8.27. Visas matricas - $n \times n$ matricas. Izmantosim apzīmējumu $\mathbf{A}^P = adj(\mathbf{A})$. Pierādīt šādus apgalvojumus.

(1) $\det(adj(\mathbf{A})) = (\det(\mathbf{A}))^{n-1}$.
(2) $adj(\mathbf{A}^T) = adj(\mathbf{A})^T$.
(3) $adj(\mathbf{AB}) = adj(\mathbf{A})adj(B)$.
(4) Ja $\mathbf{A}$ ir invertējama, tad $adj(\mathbf{A}^{-1}) = adj(\mathbf{A})^{-1}$.
(5) Ja $n \geq 3$, tad $adj(adj(\mathbf{A})) = (\det(\mathbf{A}))^{n-2}\mathbf{A}$.

VINGRINĀJUMS 8.28. $\mathbf{A}$ ir $n \times n$ matrica, $n \geq 2$. Pierādīt, ka

$$r(adj(\mathbf{A})) = \begin{cases} n, & ja\ r(\mathbf{A}) = n \\ 1, & ja\ r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0, & ja\ r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

9. NODAĻA

Lineārās telpas

9.1. Ievads

9.1.1. Zināmās algebriskās struktūras.

Līdz šim brīdim tika definētas 2 algebriskas struktūras:

- grupas:
  - viena bināra asociatīva operācija,
  - eksistē neitrālais elements,
  - katram elementam eksistē inversais elements;
- gredzeni:
  - divas bināras asociatīvas operācijas + un $\cdot$,
  - attiecībā uz + - komutatīva grupa,
  - + un $\cdot$ saista distributivitātes likums.

Piemērs 9.1. Grupu piemēri: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ Gredzenu piemēri: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Gredzena speciālgadījums - lauks: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Definēsim jauna tipa algebrisku struktūru: *lineāru telpu (LT) virs lauka,* kurā ir definētas šādas operācijas:

(1) saskaitīšana +, attiecībā uz saskaitīšana LT ir komutatīva grupa: LT elementus var saskaitīt tā it kā tie būtu skaitļi;
(2) reizināšana ar lauka elementiem, LT elementus var "izstiept" ar koeficientu.

Ja nav uzdota papildus struktūra, LT elementus nevar "reizināt" savā starpā. Par LT elementiem var domāt kā par "daudzdimensionāliem skaitļiem" - skaitļu virknēm vai citām struktūram, kurus var saskaitīt neatkarīgi katrā adresē, bet nevar "reizināt" savā starpā.

9.1.2. Motivējošie piemēri.

Homogēnas LVS atrisinājumi

Homogēnai LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

- atrisinājumu (kā kolonnu vai rindu matricu) summa ir atrisinājums:
  $$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \implies \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
- atrisinājuma (kā kolonnu vai rindu matricu) reizinājums ar skaitli ir atrisinājums:
  $$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{Ax}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Tādējādi homogēnas LVS atrisinājumu kopā var definēt 2 minētās operācijas - tā ir slēgta attiecībā uz šīm operācijām.

Paralēlā pārnese, vektori

Vektoru var definēt kā

- nogriezni ar virzienu,
- sakārtotu punktu pāri,
- telpas paralēlo pārnesi.

Tika definētas šādas operācijas ar vektoriem:

- vektoru saskaitīšana,

- vektora reizināšana ar skaitli.

Var redzēt, ka vektoru operācijām izpildās šādas īpašības:

- saskaitīšana ir asociatīva un komutatīva,
- eksistē nulles vektors,
- katram elementam eksistē negatīvais vektors,
- reizināšanai ar skaitli izpildās distributīvās un asociatīvās īpašības.

9.1.3. Definīcija.
Par *lineāru telpu (LT) virs lauka k (k-lineāru telpu, vektoru telpu)* sauc kopu L ar šādām operācijām:

(1) bināra operācija $+$ kopā L tāda, ka $(L, +)$ ir komutatīva grupa (*LT L aditīvā grupa*, izmanto aditīvo pierakstu) -
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
- $x + y = y + x$ (komutativitāte),
- $\exists\, 0 \in L: \ x + 0 = x, \forall\, x \in L$ (neitrālā elementa eksistence),
- $\forall\, x \in L\ \exists - x: \ x + (-x) = 0$ (inversā elementa eksistence);

(2) lauka k *darbības funkcija* $k \times L \to L$:
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- $1 \cdot x = x$,
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Ar simbolu $+$ parasti apzīmēsim saskaitīšanu gan laukā k, gan LT, centīsimies nepieļaut pārpratumus. Ja $k = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), tad k-lineāru telpu sauc par *reālu (kompleksu) lineāru telpu*. Vienā kopā var LT struktūra virs dažādiem laukiem.

Teorēma 9.2. $\forall$ *LT izpildās šādas īpašības:*

(1) $0 \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$.
(2) $\lambda \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.
(3) $\lambda \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{0} \implies \lambda = 0$ *vai* $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$.
(4) $n \cdot \boldsymbol{l} = \underbrace{\boldsymbol{l} + \dots + \boldsymbol{l}}_{n\ reizes}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
(5) $(-1) \cdot \boldsymbol{l} = -\boldsymbol{l}$.
(6) $(-\lambda)\boldsymbol{l} = -(\lambda \boldsymbol{l}) = \lambda(-\boldsymbol{l})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $0 \cdot \mathbf{l} = (0 + 0)\mathbf{l} = 0 \cdot \mathbf{l} + 0 \cdot \mathbf{l} \implies 0 \cdot \mathbf{l} + (-0 \cdot \mathbf{l}) = 0 \cdot \mathbf{l} + 0 \cdot \mathbf{l} + (-0 \cdot \mathbf{l}) \implies \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{l}$.

2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0} \implies \lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0} \implies \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}$.

3. $\lambda \neq 0 \implies \exists \lambda^{-1} \implies \lambda^{-1}(\lambda \cdot \mathbf{l}) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \mathbf{l} = 1 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} = \mathbf{0}$.

4. Indukcija ar parametru n. Pieņemsim, ka $(n-1)\mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + \dots + \mathbf{l}}_{n-1 \text{ reizes}} \implies n \cdot \mathbf{l} = (n - 1 + 1)\mathbf{l} =$
$(n-1)\mathbf{l} + \mathrm{l} = \underbrace{\mathbf{l} + \dots + \mathbf{l}}_{n-1 \text{ reizes}} + \mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + \dots + \mathbf{l}}_{n \text{ reizes}}$.

5. $(-1) \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l} = (-1 + 1)\mathbf{l} = 0 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \implies -\mathbf{l} = (-1) \cdot \mathbf{l}$.

6. $(-\lambda)\mathbf{l} = (\lambda(-1)\mathbf{l}) = \lambda(-\mathbf{l})$. $(-\lambda)\mathbf{l} = (-1)(\lambda \cdot \mathbf{l}) = -(\lambda\mathbf{l})$. ∎

9.2. Klasiskās lineārās telpas

9.2.1. Divi speciālgadījumi.

$\forall$ laukam k kopa $\{0\}$ ir LT, operācijas ir definētas šādi:

- $0 + 0 = 0$;
- $\lambda \cdot 0 = 0$, $\forall\ \lambda \in k$.

$\forall$ laukam k kopa k ir LT, operācijas ir definētas šādi:

- $+$ ir lauka saskaitīšanas operācija;
- $\cdot$ ir lauka reizināšanas operācija.

9.2.2. Aritmētiskā (koordinātu, vektoru) telpa.

k - lauks. Definēsim kopā $\underbrace{k \times ... \times k}_{n \text{ reizes}} = k^n$ LT struktūru šādā veidā:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās. k^n, kur $n \in \{1, 2, 3\}$ var identificēt ar ğeometrisko vektoru telpām.

Var definēt LT, kuras elementi ir bezgalīgas virknes. Apzīmēsim ar $k^{\mathbb{N}}$ kopu, kuras elementi ir visas uz labo pusi bezgalīgās virknes formā $(x_1, ..., x_n, ...)$. Kopā $k^{\mathbb{N}}$ ir uzdota LT struktūra ar virkņu saskaitīšanas un reizināšanas ar skaitli operācijām.

9.2.3. Matricu telpa.

k - lauks. Definēsim matricu kopā $\mathcal{M}at(m, n, k)$ LT struktūru šādā veidā:

- $+$ - matricu saskaitīšana;
- $\cdot$ - matricas reizināšana ar skaitli.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

Piezīme 9.3. $k^n = \mathcal{M}at(1, n, k)$.

9.2.4. Funkciju telpa.

S - kopa, k - lauks. Apzīmēsim ar $\mathcal{F}un(S, k)$ visu funkciju kopu no S uz k. Definēsim kopā $\mathcal{F}un(S, k)$ LT struktūru šādā veidā:

- $(f, g) \mapsto f + g$: $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$;
- $(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$: $(\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s)$.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

Var apskatīt LT, kuru elementi ir funkcijas ar speciālām īpašībām, piemēram:

- visu n argumentu polinomu kopa ar koeficientiem laukā k - $k[X_1, ..., X_n]$,
- visu nepārtrauktu reālā argumenta funkciju kopa ar definīcijas apgabalu $[a, b]$ - $C^0([a, b])$,

9.2.5. Homogēnas LVS atrisinājumu telpa.

$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ - homogēna $m \times n$ LVS ar atrisinājumu kolonnu kopu $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{M}at(n, 1, k)$:

$$\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}at(n, 1, k) | \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

$\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ sauc arī par matricas $\mathbf{A}$ *nulltelpu*. Definēsim kopā $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ LT struktūru kā matricām. Var pārbaudīt, ka

- $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ ir slēgta attiecībā uz LT operācijām,
- visas aksiomas izpildās.

9.2.6. Pakāpes kopa un simetriskā starpība.
S - kopa, $\mathcal{P}(S)$ - visu S apakškopu kopa - *pakāpes kopa.* Kopā $\mathcal{P}(S)$ definēsim šādas operācijas:

- saskaitīšana - $A + B = A\Delta B$ (kopu simetriskā starpība);
- reizināšana ar lauka $\mathbb{F}_2$ elementiem:
  - $1 \cdot A = A$,
  - $0 \cdot A = \varnothing$.

Ar tiešu pārbaudi var pārliecināties, ka $\mathcal{P}(S)$ ar definētajām operācijām ir $\mathbb{F}_2$-lineāra telpa.

9.3. Apakštelpas

9.3.1. Pamatfakti.
L - LT, $V \subseteq L$. V sauc par L *apakštelpu (lineāru apakštelpu,* apzīmē $V \leq L$), ja

(1) $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V \implies \mathbf{v} + \mathbf{v}' \in V$ (V ir slēgta attiecībā uz saskaitīšanu),
(2) $\forall\, \lambda \in k\, \forall\, \mathbf{v} \in V \implies \lambda\mathbf{v} \in V$ (V ir slēgta attiecībā uz reizināšanu ar lauka elementiem).

Piezīme 9.4. $\forall$ LT L $\exists$ 2 *triviālas apakštelpas:*

- $\{\mathbf{0}\} \leq L$,
- $L \leq L$.

Piemērs 9.5. Taisnes vektori plaknē. Diagonālas matricas. Monomi. Polinomi ar ierobežotu pakāpi.

Teorēma 9.6. *L - lineāra telpa.*

(1) $V \leq L \implies V$ ir LT.
(2) $\left\{\begin{array}{l} V \leq L \\ W \leq V \end{array}\right. \implies W \leq L.$

PIERĀDĪJUMS
(1) LT operācijas ir korekti definētas kopā V. LT aksiomas izpildās tāpēc, ka tās izpildās LT L.

(2) W ir slēgta attiecībā uz operācijām gan kā V, gan kā L apakškopa. ■

9.3.2. Operācijas ar apakštelpām.
Ja ir definētas vairākas apakštelpas, tad definēt to kopu-teorētisko šķēlumu.

Teorēma 9.7. *L - LT.*

$$\left\{\begin{array}{l} V \leq L \\ W \leq L \end{array}\right. \implies V \cap W \leq L.$$

PIERĀDĪJUMS $\mathbf{u} \in V \cap W \iff \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} \in V \\ \mathbf{u} \in W \end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} \in V \cap W \\ \mathbf{u}' \in V \cap W \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in V, \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in W \\ \lambda\mathbf{u} \in V, \lambda\mathbf{u} \in W \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in V \cap W \\ \lambda\mathbf{u} \in V \cap W. \end{array}\right. \quad ■$$

Piezīme 9.8. Teorēmu var vispārināt uz jebkuras apakštelpu kopas šķēlumu:

$$\forall\, i : V_i \leq L \implies \bigcap_i V_i \leq L.$$

PIEZĪME 9.9. Apakštelpu apvienojums var nebūt apakštelpa. Var apskatīt piemērus ar plaknes vektoru telpu.

$V, W \leq L$. Definēsim kopu $V + W \subseteq L$ (V un W *summu*) ar šādu īpašību:

$$V + W = \{\mathbf{l} \in L | \exists\ \mathbf{v} \in V, \exists\ \mathbf{w} \in W : \mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}\}.$$

Divu apakštelpu summas jēdzienu var vispārināt uz galīga skaita apakštelpu summu. $V_i \leq L,\ 1 \leq i \leq n$. Definēsim kopu $\sum_{i=1}^{n} V_i \subseteq L$ ar šādu īpašību:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \{\mathbf{l} \in L | \forall\ i\ \exists\ \mathbf{v}_i \in V_i : \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\}.$$

Vienkāršākās īpašības:

- $V + W = W + V$,
- $(V + W) + Z = V + (W + Z)$.

PIEMĒRS 9.10. Plaknes vektori. Monomu apakštelpas.

TEORĒMA 9.11. *L - lineāra telpa.*

$$\begin{cases} V \leq L \\ W \leq L \end{cases} \implies V + W \leq L.$$

PIERĀDĪJUMS

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V + W \\ \mathbf{u}' \in V + W \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \text{kur}\ \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \\ \mathbf{u}' = \mathbf{v}' + \mathbf{w}',\ \text{kur}\ \mathbf{v}' \in V, \mathbf{w}' \in W \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') = \underbrace{(\mathbf{v} + \mathbf{v}')}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{w} + \mathbf{w}')}_{\in W} \in V + W \\ \lambda\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \underbrace{\lambda\mathbf{v}}_{\in V} + \underbrace{\lambda\mathbf{w}}_{\in W} \in V + W. \end{cases} \blacksquare$$

PIEZĪME 9.12. Teorēmu var vispārināt uz jebkuras apakštelpu kopas summu:

$$\forall\ i : V_i \leq L \implies \sum_i V_i \leq L.$$

PIEZĪME 9.13. Var pierādīt, ka

- $V \cap W$ ir lielākā apakštelpa, kuru satur gan V, gan W,
- $V + W$ ir mazākā apakštelpa, kas satur gan V, gan W.

9.3.3. Lineāru telpu ārējā tiešā summa.

L_1,...,L_n - k-LT. Kopā $L_1 \times ... \times L_n$ definēsim šādas operācijas:

- saskaitīšana - $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) + (\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}_n + \mathbf{u}'_n)$,
- reizināšanu ar lauka elementu - $\lambda(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) = (\lambda\mathbf{u}_1, .., \lambda\mathbf{u}_n)$.

TEORĒMA 9.14.
Definētās operācijas kopā $L_1 \times ... \times L_n$ apmierina lineāras telpas aksiomas.

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude. $\blacksquare$

Kopu $L_1 \times ... \times L_n$ ar definētajām operācijām sauc par L_1,...,L_n *ārējo tiešo summu*, apzīmē kā $L_1 \oplus ... \oplus L_n$.

PIEMĒRS 9.15. $k^n = \underbrace{k \oplus ... \oplus k}_{n \text{ reizes}}$.

9.4. Lineārais slēgums

9.4.1. Lineārās kombinācijas.

Ja ir doti LT L elementi $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$, tad par to *lineāru kombināciju ar koeficientiem* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sauc L elementu

$$\lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i.$$

Ja vismaz viens no $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nav vienāds ar 0, tad lineāro kombināciju sauc par netriviālu (pretējā gadījumā - par triviālu).

PIEMĒRS 9.16. Viena elementa kopas $\{\mathbf{l}\}$ lineārās kombinācijas - $\lambda \mathbf{l}$.

PIEMĒRS 9.17. *Vektoru (kolonnnu) lineāras kombinācijas interpretācija izmantojot katricu reizinājumu.* Ja ir dotas n kolonnas ar garumu m $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n$, tās var savienot $m \times n$ matricā $\mathbf{M} = [\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2|...|\mathbf{k}_n]$. Var pārbaudīt, ka $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{k}_j = \mathbf{M}\lambda$, kur $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ ... \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

9.4.2. Lineārais slēgums.

$X \subseteq L$. Visu X galīgu apakškopu elementu lineāru kombināciju kopu sauc par X *lineāro slēgumu*, apzīmē ar $\langle X \rangle$.

Vienkāršākās īpašības:

- $X \subseteq \langle X \rangle$;
- $\langle \{\mathbf{0}\} \rangle = \{\mathbf{0}\}$;
- $\langle \{\mathbf{l}\} \rangle = \{\mathbf{x} \in L | \mathbf{x} = \mu \mathbf{l},\ \text{kur } \mu \in k\}$;
- $\langle L \rangle = L$.

TEORĒMA 9.18. *L - LT, $X \subseteq L$.*

(1) $\langle X \rangle \leq L$.
(2) $X \leq L \implies \langle X \rangle = X$.
(3) $\begin{cases} X \subseteq V \\ V \leq L \end{cases} \implies \langle X \rangle \leq V$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\begin{cases} \mathbf{u} \in \langle X \rangle \\ \mathbf{u}' \in \langle X \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{u} = \sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i,\ \text{kur } \mathbf{x}_i \in X \\ \mathbf{u}' = \sum\limits_i \mu_i' \mathbf{x}_i',\ \text{kur } \mathbf{x}_i' \in X \end{cases} \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i + \sum\limits_i \mu_i' \mathbf{x}_i' \in \langle X \rangle \\ \lambda \mathbf{u} = \lambda \Big(\sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i \Big) = \sum\limits_i (\lambda \mu_i) \mathbf{x}_i \in \langle X \rangle \end{cases}$$

2. $X \subseteq \langle X \rangle$. Jāpierāda, ka $\langle X \rangle \subseteq X$. $\mathbf{u} \in \langle X \rangle \implies \mathbf{u} = \sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i$, kur $\mathbf{x}_i \in X$. $X \leq L \implies \sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i \in X \implies \mathbf{u} \in X$.

3.$\mathbf{u} \in \langle X \rangle \implies \mathbf{u} = \sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i$, kur $\mathbf{x}_i \in X$. $X \subseteq V \implies \sum\limits_i \mu_i \mathbf{x}_i \in V \implies \mathbf{u} \in V$.■

PIEZĪME 9.19. Var pierādīt, ka $V + W = \langle V \cup W \rangle$.

9.4.3. Veidotājsistēmas.

$X \subseteq L$ sauc par L *veidotājsistēmu (ģenerējošo kopu)*, ja $\langle X \rangle = L$.

PIEMĒRS 9.20. k^n veidotājsistēma var būt $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, kur $\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, ..., 1, ..., 0)}_{\text{1 i-tajā vietā}}$. Redzam, ka $(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$. $\mathcal{M}at(m, n, k)$ veidotājsistēma $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{mn}\}$: $\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{E}_{ij}$.

9.5. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 9.21. Noteikt, vai dotās kopas ir LT:
(1) plaknes vektori, kuru galapunkti atrodas pirmajā kvadrantā;
(2) $m \times n$ matricas ar fiksētu rangu r;
(3) $S \subseteq \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_3, x_2 = x_4)\}$.

VINGRINĀJUMS 9.22. Noteikt, vai LT L apakškopa V ir L apakštelpa:
(1) $L = \mathbb{R}^2$ (plaknes vektori), V - vektori, kuru galapunkti ir uz līknes $y = x^3$,
(2) $L = \mathbb{R}^n$, V - virknes, kuru visi elementi ir veseli skaitļi,
(3) $L = \mathcal{M}at(m, n, k)$, V - augšēji trijstūrveida matricas,
(4) $L = \mathbb{R}[X]$, $L = \{f | \deg(f) \geq 2\}$.

VINGRINĀJUMS 9.23. Dotas LT V un W, atrast $V \cap W$.
(1) $V, W \leq \mathbb{R}^3$, $V = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, y, 0), \forall\, x, y\}$,
$W = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} = (0, y, z), \forall\, y, z\}$;
(2) $V, W \leq \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$, V - augšēji trijstūrveida matricas, W - apakšēji trijstūrveida matricas;
(3) $V_s, V_t \leq \mathbb{R}[X]$, $s \neq t$, $V_a = \{f | f(a) = 0\}$.

VINGRINĀJUMS 9.24. Dotas apakštelpas V un W, atrast $V + W$.
(1) $V, W \leq \mathbb{R}^2$, $V = \langle (1, 0) \rangle$, $W = \langle (1, 1) \rangle$,
(2) $V, W \leq \mathcal{M}at(2, \mathbb{R})$, $V = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12} \rangle$, $W = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{21} \rangle$,

VINGRINĀJUMS 9.25. Noteikt vai elements $\mathbf{l}$ pieder lineārajam slēgumam S.
(1) $S = \langle (0, 1, 2), (-1, 3, 1) \rangle$, $\mathbf{l} = (4, -9, 10)$, $L = \mathbb{R}^3$,
(2) $S = \langle X - 1, X^2 - 1 \rangle$, $\mathbf{l} = X + 1$, $L = \mathbb{R}[X]$,
(3) $S = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{22} + \mathbf{E}_{33} \rangle$, $\mathbf{l} = \mathbf{E}_3$, $L = \mathcal{M}at(3, \mathbb{R})$.

VINGRINĀJUMS 9.26. Atrast kādu LT L galīgu veidotājsistēmu.
(1) L - simetrisku $n \times n$ matricu telpa,
(2) L - homogēnas LVS
$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$
atrisinājumu telpa, virs $\mathbb{Q}$.

VINGRINĀJUMS 9.27. Noteikt vai $\mathbb{R}$-lineārā telpa $\mathbb{R}[X]$ ir galīgi ģenerēta.

VINGRINĀJUMS 9.28. (1) Pierādīt, ka saskaitīšanas komutativitāte seko no citām LA definējošām īpašībām.
(2) Izpētīt, kādas LT definējošās īpašības seko no citām.

VINGRINĀJUMS 9.29. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{Q})$ sauc par
- *pusmaģisku kvadrātu*, ja visu rindu un kolonnu elementu summas ir vienādas,
- *maģisku kvadrātu*, ja visu rindu, kolonnu un abu diagonāļu elementu summas ir vienādas.

(1) Pierādīt, ka abu veidu maģiskie kvadrāti veido lineāras apakštelpas LT $\mathcal{M}at(n, \mathbb{Q})$.
(2) Atrast galīgas veidotājsistēmas abu veidu maģisko kvadrātu LT gadījumos, kad $n \in \{2, 3, 4, ...\}$.

10. NODAĻA

Lineārā neatkarība, bāze un dimensija

10.1. Lineārā atkarība

10.1.1. Definīcija.
LT L elementus $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$ sauc par *lineāri atkarīgiem*, ja eksistē to netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n, \exists\ \lambda_i \neq 0 :\ \ \lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = 0.$$

Lineāras telpas L elementus $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$ sauc par *lineāri neatkarīgiem*, ja tikai to triviāla lineāra kombinācija ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = \mathbf{0}\ \Longrightarrow\ \forall i\ \lambda_i = 0.$$

Bezgalīgu kopu $X \subseteq L$ sauc par lineāri atkarīgu, ja eksistē galīga netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar $\mathbf{0}$.

Lineārā atkarība un neatkarība ir attiecības, kas ir uzdotas L apakškopās. Faktu, ka X ir lineāri atkarīga (neatkarīga) kopa apzīmēsim ar $\overline{X}$ ($\underline{X}$).

10.1.2. Speciālgadījumi.
<u>1 elements</u> $S = \{\mathbf{l}\}$. $\underline{S} \iff \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$.

<u>2 elementi</u> $S = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\}$. $\underline{S} \iff \mathbf{l}_1 \neq \lambda \mathbf{l}_2,\ \mathbf{l}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{l}_2 \neq \mathbf{0}$.

10.1.3. Pamatīpašības.

Teorēma 10.1. *L - lineāra telpa.*

(1) $\overline{X} \iff \exists\ \boldsymbol{l} \in X :\ \boldsymbol{l} \in \langle X \backslash \{\boldsymbol{l}\}\rangle$ *($\boldsymbol{l}$ var izteikt kā pārējo X elementu lineāru kombināciju).*

(2) $\left\{\begin{array}{l}\underline{X},\\ Y \subseteq X\end{array}\right. \Longrightarrow \underline{Y}$ *(lineāri neatkarīgas kopas apakškopa ir lineāri neatkarīga).*

(3) $\left\{\begin{array}{l}\overline{X},\\ X \subseteq Z\end{array}\right. \Longrightarrow \overline{Z}$ *(jebkura kopa, kas satur lineāri atkarīgu apakškopu, ir lineāri atkarīga).*

(4) $\boldsymbol{0} \in X \Longrightarrow \overline{X}$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\overline{X} \iff \exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i = \mathbf{0}$, kur $\lambda_j \neq 0$. $\Longrightarrow\ \lambda_j \mathbf{l}_j = -\sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i \Longrightarrow \mathbf{l}_i = -\dfrac{1}{\lambda_j} \sum\limits_{i=1, i\neq j} \lambda_i \mathbf{l}_i \Longrightarrow \mathbf{l}_j \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}_i\}\rangle$.

$\exists\ j :\ \mathbf{l}_j \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}_i\}\rangle \Longrightarrow \mathbf{l}_j = \sum\limits_{i=1, i\neq j} \mu_i \mathbf{l}_i \Longrightarrow \exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\mathbf{l}_j - \sum\limits_{i=1, i\neq j} \mu_i \mathbf{l}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \overline{X}$.

2. Pieņemsim pretējo: $\begin{cases} \underline{X} \\ Y \subseteq X \\ \overline{Y} \end{cases} \Longrightarrow \exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{y}_i = \mathbf{0}$. Tā pati netriviālā lineārā kombinācija var tikt uzskatīta arī kā lineāra kombinācija ar X elementiem, jo $\mathbf{y}_i \in X$ - pretruna ar $\underline{X}$.

3. Pieņemsim pretējo: $\begin{cases} \overline{X}, \\ X \subseteq Z \\ \underline{Z} \end{cases} \Longrightarrow \exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Tā pati netriviālā lineārā kombinācija var tikt uzskatīta arī kā lineāra kombinācija ar Z elementiem, jo $\mathbf{x}_i \in Z$ - pretruna ar $\underline{Z}$.

4. $\mathbf{0} \in X \Longrightarrow \exists$ netriviāla kombinācija $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot l = \mathbf{0}, \forall\, l \in X.$■

10.2. Lineāras telpas bāze

10.2.1. Definīcija.
LT L apakškopu $\mathcal{B}$ sauc par L *bāzi,* ja
(1) $\underline{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$ ir lineāri neatkarīga kopa),
(2) $\langle \mathcal{B} \rangle = L$ ($\mathcal{B}$ ir L veidotājsistēma).

Piezīme 10.2. LT bāze nav noteikta viennozīmīgi, ja neskaita atsevišķus gadījumus.

Piemērs 10.3. $L = \mathbb{R}^2$ - plaknes vektori, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

10.2.2. Kanoniskās bāzes.
Aritmētiskā telpa k^n *Kanoniskā bāze* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, kur

$$\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, ..., 1, ..., 0)}_{\text{1 i-tajā vietā}}:$$

- $(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i,$
- $\underline{\mathcal{B}}: \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \forall\, i : \lambda_i = 0.$

Matricu telpa $\mathcal{M}at(m,n,k)$ Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{mn}\}$:

- $\mathbf{A} = \sum\limits_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \mathbf{E}_{ij},$
- $\underline{\mathcal{B}}: \sum\limits_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij} \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{0} \Longrightarrow \forall\, i,j : \lambda_{ij} = 0.$

Funkciju telpa $\mathcal{F}un(S,k)$, kur $|S| < \infty$. Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{e_s\}_{s \in S}$, kur

$$e_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x = s \\ 0, & \text{ja } x \neq s. \end{cases}$$

- $f(x) = \sum\limits_{s \in S} f(x) e_s(x) = \Big(\sum\limits_{s \in S} f(x) e_s\Big)(x),$
- $\underline{\mathcal{B}}: \Big(\sum\limits_{s \in S} \lambda_s e_s\Big)(x) = 0(x) \Longrightarrow \forall\, s : \lambda_s = 0.$

Polinomi $k[X]$ Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{1, X, X^2 ...\}$, $|\mathcal{B}| = \infty$.

- $p(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i X^i,$

- $\underline{\mathcal{B}}: \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^i = \mathbf{0} \implies \forall\, i : \lambda_i = 0.$

Matricas $\mathbf{A}$ nulltelpa $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ Jebkuru bāzi sauc par *fundamentālo atrisinājumu kopu.*

10.2.3. Bāzes eksistence.
LT L sauc par *galīgi ģenerētu,* ja tai eksistē galīga veidotājsistēma.

Piemērs 10.4. k^n, $\mathcal{M}at(m,n,k)$ - galīgi ģenerētas. $k[X]$, $k^{\mathbb{N}}$ - nav galīgi ģenerētas.

Teorēma 10.5. *L - galīgi ģenerēta LT.*

(1) $\exists\ L$ *bāze* $\mathcal{B}: \ |\mathcal{B}| < \infty$.

(2) $\begin{cases} S \subseteq L \\ \underline{S} \end{cases} \implies \exists\ \mathcal{B} \subseteq L : \begin{cases} \mathcal{B} - L \text{ bāze} \\ S \subseteq \mathcal{B}. \end{cases}$ *(jebkuru lineāri neatkarīgu kopu var papildināt līdz bāzei).*

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $L = \langle \mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle$. Ja kopu $\mathcal{G}$ var samazināt uz kopu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ saglabājot veidotājsistēmas īpašību, tad to darīsim. Iegūsim, iespējams, mazāku kopu

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m\} : \begin{cases} \langle \mathcal{B} \rangle = L \\ \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{B} \implies \langle C \rangle \neq L. \end{cases}$$

Pierādīsim, ka $\mathcal{B}$ ir lineāri neatkarīga.

Pieņemsim pretējo: $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$. Pieņemsim, ka $\lambda_j \neq 0 \implies \mathbf{b}_j = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i \mathbf{b}_i \implies \mathbf{b}_j \in \langle \mathcal{B} \backslash \mathbf{b}_j \rangle \implies L = \langle \mathcal{B} \backslash \mathbf{b}_j \rangle$ - pretruna, jo $\mathcal{B}$ nevar samazināt saglabājot veidotājsistēmas īpašību.

2. Pieņemsim, ka

- $S = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$,
- $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ ir L bāze, kas $\exists$ saskaņā ar pirmo apgalvojumu.

Apskatīsim elementu virkni $(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$. Lasīsim šo virkni no kreisās puses un svītrosim visus elementus, kas izsakās kā virknes iepriekšējo elementu lineāra kombinācija. $\underline{S} \implies$ jāsvītro būs tikai $\mathcal{B}_0$ elementi. Rezultātā iegūsim virkni

$$(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}).$$

Pierādīsim, ka kopa $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}\}$ ir bāze.

Lineārā neatkarība

Ja eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{f}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{f}_m + \mu_1 \mathbf{e}_{i_1} + ... + \mu_j \mathbf{e}_{i_j} = 0,$$

tad $\mathbf{e}_l$ ar maksimālo indeksu, kuram $\mu_l \neq 0$, varētu izteikt kā iepriekšējo lineāru kombināciju - pretruna.

Veidotājsistēma

$\langle \mathcal{B}_0 \rangle = L$, $\forall$ izsvītrotais $\mathcal{B}_0$ elements izsakās kā neizsvītroto elementu lineāra kombinācija $\implies \forall\, x \in L$ izsakās kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija $\implies \langle \mathcal{B} \rangle = L$. ■

Piezīme 10.6. Ja L nav galīgi ģenerēta LT, tad bāze arī eksistē. Tas ir grūtāk pierādāms. Var apskatīt piemērus $k[X]$ un $k^{\mathbb{N}}$.

10.2.4. Bāzes īpašības.

TEORĒMA 10.7. *L - LT, $\mathcal{B} \subseteq L$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*

(1) *$\mathcal{B}$ - L bāze.*
(2) *$\forall\ \boldsymbol{l} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija.*
(3) *$\mathcal{B}$ ir maksimāla lineāri neatkarīga L apakškopa:*

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C} \end{cases} \Longrightarrow \overline{\mathcal{C}}.$$

(4) *$\mathcal{B}$ ir minimāla L veidotājsistēma:*

$$\begin{cases} \langle \mathcal{B} \rangle = L \\ \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \end{cases} \Longrightarrow \langle \mathcal{D} \rangle \lneq L.$$

PIERĀDĪJUMS

1. $\Longrightarrow$ 2.

$\langle \mathcal{B} \rangle = L \Longrightarrow \forall\ \mathbf{l} \in L$ ir izsakāms lineāras kombinācijas veidā: $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i$. Pieņemsim, ka $\exists\ \mathbf{l}$, kurš var tikt izteikt divos veidos:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i \Longrightarrow \mathbf{l} - \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

$\underline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \lambda_i - \mu_i = 0, \forall\ i.$

2. $\Longrightarrow$ 1.

Uzreiz seko, ka $\langle \mathcal{B} \rangle = L$. $\mathbf{0}$ var viennozīmīgi izteikt $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas veidā ar 0 koeficientiem $\Longrightarrow \underline{\mathcal{B}}$.

2. $\Longrightarrow$ 3.

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C} \end{cases} \Longrightarrow \exists\ c \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{B} :\ c \in \langle \mathcal{B} \rangle \Longrightarrow \overline{\mathcal{C}}.$$

1. $\Longrightarrow$ 4.

Uzreiz seko, ka $\langle \mathcal{B} \rangle = L$. $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \Longrightarrow \exists\ \mathbf{b} \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{D}$. Ja $\mathbf{b}$ varētu izteikt kā $\mathcal{D}$ lineāru kombināciju $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{d}_i$, tad eksistētu netriviāla lineāra kombinācija $\mathbf{b} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0}$ - pretruna ar $\underline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \mathbf{b} \notin \langle \mathcal{D} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{D} \rangle \lneq L$

4. $\Longrightarrow$ 1.

$\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \exists\ \mathbf{b} \in \mathcal{B} :\ \mathbf{b} \in \langle \underbrace{\mathcal{B} \backslash \{\mathbf{b}\}}_{=\mathcal{F}} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{F} \rangle = L$ - pretruna. ■

Ja L - LT, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze un $l = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}_i$, tad $c_1, ..., c_n$ sauc par l *koordinātēm attiecībā uz $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$-koordinātēm)*. Koordinātes bieži sakārto *koordinātu kolonnu* veidā $l \dashrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix}$

Elementa l koordinātu kolonnu attiecībā uz bāzi $\mathcal{B}$ apzīmēsim ar $[l]_{\mathcal{B}}$.

10.2.5. Bāzes atrašanas algoritmi.

10.2.5.1. *Veidotājsistēmas samazināšana.* Ja ir dota galīgi ģenerētas LT L veidotājsistēma S, tad $\exists\ B \subseteq S$, kas ir L minimāla veidotājsistēma, tātad bāze. Vienkāršākajos gadījumos minimālu veidotājsistēmu var atrast ar pārlases palīdzību.

10.2.5.2. *Lineāri neatkarīgas kopas palielināšana.* Ja $S = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_m\} \subset L$ un $\underline{S}$, tad pievienojot kopai S jebkuru $\mathbf{t} \in L \backslash \langle S \rangle$, iegūsim lineāri neatkarīgu kopu $S_1 = S \cup \{\mathbf{t}\}$. Šo elementu pievienošanu var turpināt tik ilgi, kamēr kārtējās lineāri neatkarīgās kopas S_l lineārais slēgums ir vienāds ar L.

10.3. Lineāras telpas dimensija

10.3.1. Lineāri neatkarīgu kopu ģeneratoru skaits.

TEORĒMA 10.8. *$L = \langle l_1, ..., l_n \rangle$, $S \subseteq L$. Tad*

$$\underline{S} \implies |S| \leq n.$$

PIERĀDĪJUMS
Kontrapozitīvais pierādījums: pierādīsim, ka $|S| > n \implies \overline{S}$.

Pieņemsim, ka $S = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}$, kur $m > n$. Izteiksim $\forall$ $\mathbf{t}_i$ kā $\{l_1, ..., l_n\}$ elementu lineāru kombināciju: $\mathbf{t}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{l}_j$. Vai $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$? Pārveidosim šo lineāro kombināciju: $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{l}_j \Big) = \sum\limits_{j=1}^{n} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \Big) \mathbf{l}_j$. Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i1}\lambda_i = 0 \\ ... \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{im}\lambda_i = 0 \end{cases} \iff \mathbf{B}\lambda = \mathbf{0},$$

kur $\mathbf{B}$ ir $n \times m$ matrica.

$$n < m \implies r(\mathbf{B}) \leq n \implies \exists \text{ netriviāls atrisinājums } \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_m \end{bmatrix} \implies \exists \text{ netriviāla lineāra}$$

kombinācija $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0} \implies \overline{S}$. ■

TEORĒMA 10.9. *L - galīgi ģenerēta LT, $\exists$ L bāze $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| = n$.*

(1) *$\forall$ L bāze satur n elementus.*

(2) $\begin{cases} |S| = n \\ \underline{S} \end{cases} \implies$ *S - L bāze.*

PIERĀDĪJUMS
1. Pieņemsim, ka $\exists$ L bāze $\mathcal{C}$: $|\mathcal{C}| < n$. Tā ir pretruna ar iepriekšējo teorēmu, jo $L = \langle \mathcal{C} \rangle = \langle B \rangle$, bet $|\mathcal{B}| > |\mathcal{C}|$. Tāpat iegūst pretrunu, ja pieņem, ka $\exists$ L bāze $\mathcal{D}$, kurai $|\mathcal{D}| > n$.

2. S ir maksimāla lineāri neatkarīga sistēma, tātad - bāze. ■

10.3.2. Dimensijas definīcija.

No iepriekšējās teorēmas seko, ka galīgi ģenerētas LT L bāzes elementu skaits ir L invariants (nav atkarīgs no bāzes). Galīgi ģenerētas LT L bāzes elementu skaitu sauc par L *dimensiju* $\dim(L)$. Definēsim arī $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

PIEMĒRS 10.10. $\dim(k^n) = n$ - vektoru telpa, $\dim(\mathcal{M}at(m, n, k)) = mn$.

10.4. Vingrinājumi

Vingrinājums 10.11. Noteikt, vai dotās LT elementu kopas ir lineāri neatkarīgas.

(1) $L = \mathbb{R}^2$, $\{(1,2),(3,4)\}$;
(2) $L = \mathbb{R}^3$, $\{(2,-1,0),(3,1,-2),(1,2,-2)\}$;
(3) $L = \mathbb{R}^4$, $\{(2,4,-1,1),(3,2,1,0),(1,1,-1,1),(2,0,0,9)\}$.

Vingrinājums 10.12. Ar kādām parametru vērtībām dotās LT elementu kopas ir lineāri neatkarīgas?

(1) $L = \mathbb{R}^3$, $\{(1,2,1),(-1,0,\alpha),(2,1,\beta)\}$;
(2) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $\{\alpha(\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{12}),\beta(\mathbf{E}_{12}+\mathbf{E}_{21}),\gamma(\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{21})\}$.

Vingrinājums 10.13. Pierādīt, ka dotās LT $\mathcal{F}un(\mathbb{R},\mathbb{R})$ elementu kopas ir lineāri neatkarīgas.

(1) $\{1, x, x^3\}$;
(2) $\{\sin x, \cos x\}$;
(3) $\{e^{a_1 x}, e^{a_2 x}\}$, kur $a_1 \neq a_2$.

Vingrinājums 10.14. Noteikt, vai $\mathcal{B}$ ir LT telpas L bāze.

(1) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,1/2),(2,1)\}$;
(2) $L = \mathcal{M}at(2,3)$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11},\mathbf{E}_{12},\mathbf{E}_{13},\mathbf{E}_{21}\}$;
(3) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f \mid \deg(f) \leq 2\}$, $\mathcal{B} = \{1, X-1, (X-1)^2\}$.

Vingrinājums 10.15. Papildināt kopu S līdz LT L bāzei.

(1) $L = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$;
(2) $L = \mathcal{M}at(2,2)$, $S = \{\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{22},\mathbf{E}_{12}+\mathbf{E}_{21}\}$;
(3) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f \mid \deg(f) \leq 2\}$, $S = \{2, X^2+2X+2\}$.

Vingrinājums 10.16. Noteikt LT L dimensiju.

(1) $L \leq \mathbb{R}^3$, $L = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (x,y,0), \forall\, x,y\}$;
(2) $L \leq \mathcal{M}at(m,n,\mathbb{R})$, L - augšēji trijstūrveida matricas;
(3) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f \mid \deg(f) \leq 10\}$.

Vingrinājums 10.17. Atrodiet bāzes pusmağisko un mağisko kvadrātu telpās ar izmēriem $2,3,4$.

Vingrinājums 10.18. Atrast (bezgalīgas) bāzes dotajām LT L.

(1) $L = k[X_1,...,X_n]$ - n-argumentu polinomu kopa ar koeficientiem laukā k.
(2) $L = k(X)$ - racionālo funkciju kopa ar koeficientiem laukā k, kur $k \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

Vingrinājums 10.19. L - lineāra telpa, $\dim(L) = n$, $\mathcal{B}_1,...,\mathcal{B}_n$ - L bāzes. Pierādīt, ka var izveidot matricu $\mathbf{B}$ ar šādām īpašībām:

- $\mathbf{B}$ i-tajā rindā ir visi bāzes $\mathcal{B}_i$ elementi (katras rindas elementi veido L bāzi),
- katras $\mathbf{B}$ kolonnas elementi veido L bāzi.

Piezīme. Gadījumus, ja $n \in \{2,3\}$, atrisināt nav grūti. Patvaļīgam n dotā problēma vēl nav atrisināta (*G.C.Rota problēma*)

11. NODAĻA

Lineāras telpas bāzes un dimensijas īpašības un lietojumi

11.1. Bāzes maiņa

Risinot uzdevumus lineārajā algebrā parasti sāk strādāt kādā standarta bāzē. Uzdevuma risināšanas gaitā var būt nepieciešams pāriet uz citu bāzi, kura ir labāk piemērota konkrētajam uzdevumam. Ir jāprot atrast elementu koordinātes visās bāzēs.

11.1.1. Viena elementa nomaiņa.

TEORĒMA 11.1.
L - galīgi dimensionāla LT, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ - L bāze.

$$(\mathcal{B} \backslash \boldsymbol{e}_j) \cup \boldsymbol{a} - L \text{ } bāze \iff \begin{cases} \boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \\ \lambda_j \neq 0. \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS $\begin{cases} \mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i, \\ \lambda_j \neq 0. \end{cases} \iff \mathbf{e}_j \in \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{a} \rangle \iff (\mathcal{B} \backslash \mathbf{e}_j) \cup \mathbf{a}$ - L bāze. ■

11.1.2. Vairāku elementu maiņa.

L - LT, $\dim(L) = n$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ - divas L bāzes. Katrā bāzē elementus sakārtosim - iegūsim *sakārtotas bāzes*.

Katras bāzes elementus var izteikt kā otras bāzes lineāras kombinācijas:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + ... + a_{n1}\mathbf{e}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}'_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}\mathbf{e}_i \\ ... \\ \mathbf{e}'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}\mathbf{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}'_1 + ... + s_{n1}\mathbf{e}'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} s_{i1}\mathbf{e}'_i \\ \mathbf{e}_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} s_{i2}\mathbf{e}'_i \\ ... \\ \mathbf{e}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} s_{in}\mathbf{e}'_i \end{cases}$$

PIEMĒRS 11.2. $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\underbrace{(1,0)}_{=\mathbf{e}_1}, \underbrace{(0,1)}_{=\mathbf{e}_2}\}$, $\mathcal{B}' = \{\underbrace{2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}'_1}, \underbrace{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}_2}\}$. Iegūsim šādas sistēmas:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}'_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}'_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}'_2 \end{cases}$$

Kā mainās elementa koordinātes pārejot uz citu bāzi? Atradīsim fiksēta elementa $\mathbf{l}$ koordinātes attiecībā uz abām bāzēm:

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} l_j \Big(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \mathbf{e}'_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} l_j \Big) \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} l'_i \mathbf{e}'_i.$$

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} l'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} l'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l'_j \Big) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \mathbf{e}_i.$$

Sakārtosim $\mathbf{l}$ koordinātes kolonnas matricas veidā:

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{c} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \ldots \\ l_n \end{bmatrix} \text{ vai } \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} l'_1 \\ \ldots \\ l'_n \end{bmatrix}$$

Redzam, ka

$$\begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} \\ \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}'. \end{cases}$$

Piemērs 11.3. Skatīt iepriekšējo piemēru.
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$. $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$.

Elementa koordinātes $\forall$ bāzē ir noteiktas viennozīmīgi $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{c}' = \mathbf{E}_n\mathbf{c}' \\ \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}' = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{c} = \mathbf{E}_n\mathbf{c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n \\ \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{E}_n. \end{cases}$$

11.2. Apakštelpu īpašības

11.2.1. Apakštelpu iekļaušana.

Teorēma 11.4. *L - LT.*

(1) $\begin{cases} V \leq L, \\ W \leq L, \dim W \leq \infty \\ V \leq W \end{cases} \Longrightarrow \dim V \leq \dim W.$

(2) $V \lneqq W \Longrightarrow \dim V < \dim W.$

PIERĀDĪJUMS

11.2.2. Apakštelpu šķēlums un summa.

Teorēma 11.5. *L - LT, $\dim(L) < \infty$, $U, V \leq L$. Tad*

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

PIERĀDĪJUMS
Apzīmēsim $\begin{cases} \dim(U) = m \\ \dim(V) = n \\ \dim(U \cap V) = l. \end{cases}$. $\begin{cases} U \cap V \leq U \\ U \cap V \leq V \end{cases}$.

Izvēlēsimies apakštelpā $U \cap V$ bāzi $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}$ un papildināsim to līdz U un V bāzēm

$$\begin{cases} \mathcal{B}_U = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}\} \subseteq U \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\} \subseteq V. \end{cases}$$

Redzam, ka kopa

$$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\}$$

ir $U+V$ veidotājsistēma. Pierādīsim, ka tā ir lineāri neatkarīga un, tādējādi, $U+V$ bāze.

Pieņemsim, ka eksistē lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m-l} \nu_i \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \mathbf{0}.$$

Pārveidosim to šādā veidā:

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m-l} \nu_i \mathbf{f}_i = -\sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \mathbf{h} \implies \mathbf{h} \in U \cap V \implies -\sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i \mathbf{e}_i.$$

Tā kā iegūtā linearā kombinācija saista V bāzes elementus, seko, ka tā ir triviāla $\implies$ $\sigma_i = 0, \mu_i = 0, \forall\, i \implies \lambda_i = 0, \forall\, i$.

Esam pierādījuši, ka $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\}$ ir $U+V$ bāze. Tagad skaitīsim dimensijas:

$$\dim(U+V) = l + (m-l) + (n-l) = m + n - l = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).\blacksquare$$

Ja $V \leq L$, tad lielumu $\dim(L) - \dim(V)$ sauc par V *kodimensiju* $\operatorname{codim}(V)$. Ja $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, tad V un W sauc par neatkarīgām apakštelpām.

PIEMĒRS 11.6. Vektori telpā.

11.2.3. Apakštelpu iekšējā tiešā summa un papildinošā apakštelpa.

11.2.3.1. *Divu apakštelpu gadījums.* $\begin{cases} V, W \leq L \\ V \cap W = \{0\} \; (\dim V \cap W = 0) \end{cases} \implies V + W$ sauc par *(iekšējo) tiešo summu* $V \oplus W$.

Ja $V \oplus W = L$, tad W sauc par *papildinošo apakštelpu* attiecībā uz V (apzīmē ar V^p), un otrādi.

TEORĒMA 11.7. *L - LT, $V \leq L$.*

(1) $\exists\, W \leq L : \; V \oplus W = L$.
(2) $L = V \oplus W \iff \forall\, \boldsymbol{l} \in L\; \exists$ viennozīmīgi noteikti $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$ ($\boldsymbol{l}$ projekcijas): $\mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.
(3) $L = V \oplus W \iff \dim(L) = \dim(V) + \dim(W)$.
(4) $L = V \oplus W$, $\mathcal{B}_V$ - V bāze, $\mathcal{B}_W$ - W bāze. Tad $\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W$ - L bāze.

PIERĀDĪJUMS

1. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, turpināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$. Apskatīsim $W = \langle \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \rangle$. Redzam, ka $V + W = L$. Pierādīsim, ka $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Pieņemsim, ka $\mathbf{t} \in V \cap W \implies$

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j.$$

$\mathbf{t} \neq \mathbf{0} \implies \exists\, \lambda_i \neq 0 \implies \overline{\mathcal{B}}$.

2. $\underline{\implies}$ Atradīsim apakštelpu V un W bāzes $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$.

$\forall\ \mathbf{l} \in L$ var izteikt formā

$$\mathbf{l} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{v}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j}_{=\mathbf{w}} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}' \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}' \end{cases}$$

$\Longleftarrow$

$\forall\ \mathbf{l}$ var izteikt summas veidā $\implies$ $L = V + W$. $V \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$ $\implies$ $\mathbf{t} \in V \cap W$ var izteikt summas veidā divējādi:

$$\mathbf{t} = \underbrace{\mathbf{t}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{t}}_{\in W}.$$

3. $\dim(L) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$.

4. Seko no iepriekšējiem apgalvojumiem. ■

PIEZĪME 11.8. Papildinošā apakštelpa nav noteikta viennozīmīgi, ja neskaita speciālgadījumus. $\mathbf{l} \in L$ projekciju uz V apzīmē ar $\pi_V(\mathbf{l})$. Projekcija ir atkarīga no abām telpām V un V^p.

PIEMĒRS 11.9. Vektori. Matricas. Polinomi.

11.2.3.2. *Vairāku apakštelpu gadījums.* $V_1, ..., V_m \leq L$. Teiksim, ka L ir apakštelpu $V_1, ..., V_m$ iekšējā tiešā summa ($L = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), ja $\forall\ \mathbf{l} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms veidā

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i, \text{ kur } \mathbf{v}_i \in V_i.$$

TEORĒMA 11.10. *L - LT, $V_i \leq L$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*

(1) $L = V_1 \oplus ... \oplus V_m$.

(2) $\forall\ j : V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i \right) = \{\mathbf{0}\}$.

(3) $\dim(V) = \sum_{i=1}^{m} \dim(V_i)$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi. ■

TEORĒMA 11.11. *L - LT, $V_i \leq L\ \forall\ i$, $\mathcal{B}_i$ - V_i bāze.* $L = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \implies \mathcal{B}_L = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi. ■

11.3. Matricas un lineāru vienādojumu sistēmas

11.3.1. Matricas rindu un kolonnu telpas. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{k}_1 | ... | \mathbf{k}_n] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array} \right].$$

Definēsim divas LT, kas ir saistītas ar $\mathbf{A}$:

- $\mathbf{A}$ *rindu telpu* $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle \leq \mathcal{M}at(1, n, k)$,
- $\mathbf{A}$ *kolonnu telpu* $K(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle \leq \mathcal{M}at(m, 1, k)$.

TEORĒMA 11.12. *$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$.*

(1) *REP nemaina $R(\mathbf{A})$.*

(2) *KEP nemaina $K(\mathbf{A})$.*

PIERĀDĪJUMS
1. $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

1.veida pārveidojums $\mathbf{r}_i \longleftrightarrow \mathbf{r}_j$
$\langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

2.veida pārveidojums $\mathbf{r}_i \longrightarrow \lambda \mathbf{r}_i$.

$\mathbf{r}_i = \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbf{r}_i) \implies \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \lambda \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

3.veida pārveidojums $\mathbf{r}_j \longrightarrow \mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i$.
$\mathbf{r}_j = (\mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i) - \lambda \mathbf{r}_i \implies \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

2. Pierāda līdzīgi. ■

11.3.2. Matricas ranga interpretācija.

TEORĒMA 11.13. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$.
(1) $rr(\boldsymbol{A}) = \dim R(\boldsymbol{A})$.
(2) $rk(\boldsymbol{A}) = \dim K(\boldsymbol{A})$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pārveidosim $\mathbf{A}$ ar REP rindu pakāpienveida formā

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 \\ ... \\ \mathbf{r}'_l \\ \mathbf{0} \\ ... \end{bmatrix}, \text{ kur } \mathbf{r}'_i \text{ - nenulles rindas.}$$

$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}')$. Pierādīsim, ka $\mathcal{B} = \{\mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}'_l\}$ ir $R(\mathbf{A})$ bāze.

Veidotājsistēma

Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}_l \rangle$.

Lineārā neatkarība

Pieņemsim, ka $\exists$ lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{r}'_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + ... + \lambda_l \mathbf{r}'_l = \mathbf{0}.$$

Veicam šādu secinājumu virkni:
(1) Rindai $\mathbf{r}'_1$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_2, ..., \mathbf{r}'_l \implies \lambda_1 = 0$.
(2) Rindai $\mathbf{r}'_2$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_3, ..., \mathbf{r}'_l \implies \lambda_2 = 0$.
(3) ...
(4) Rindai $\mathbf{r}'_{l-1}$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_l \implies \lambda_{l-1} = 0$.
(5) $\lambda_l = 0$.

2. Pierāda līdzīgi, izmantojot KEP. ■

11.3.3. Kopas lineārā slēguma bāzes atrašana.

TEORĒMA 11.14. *L - LT, $\mathcal{B}$ - L bāze, $S = \{l_1, ..., l_n\} \subseteq L$, $\boldsymbol{A}$ - matrica, kas ir iegūta savienojot S elementu $\mathcal{B}$-koordinātu kolonnas. Tad $\langle S \rangle$ bāzi $\mathcal{B}_S$ var atrast izmantojot šādus algoritmus.*

(1) *Ar KEP pārveidot $\boldsymbol{A}$ kolonnu pakāpienveida formā $\boldsymbol{A}_K$. Tad $\boldsymbol{A}_K$ nenulles rindas ir $\mathcal{A}$ elementu koordinātu kolonnas.*
(2) *Ar REP pārveidot $\boldsymbol{A}$ rindu pakāpienveida formā $\boldsymbol{A}_R$. Tad $\boldsymbol{A}$ kolonnas, kas atbilst $\boldsymbol{A}_R$ galvenajām rūtiņām, ir $\mathcal{A}$ elementu koordinātu kolonnas.*

PIERĀDĪJUMS

11.3.4. Lineārās neatkarības kritērijs.

TEORĒMA 11.15. *L - LT, $\mathcal{B}$ - L bāze, $S = \{l_1, ..., l_n\} \subseteq L$, $\boldsymbol{A}$ - matrica, kas ir iegūta savienojot S elementu $\mathcal{B}$-koordinātu kolonnas. Tad*

$$\underline{S} \iff r(\boldsymbol{A}) = n.$$

PIERĀDĪJUMS
$\overline{S} \iff$ kādu no $\mathbf{A}$ kolonnām var izteikt kā pārējo kolonnu lineāru kombināciju $\iff$ $rk(\mathbf{A}) < n$. ■

11.3.5. Matricu invertējamības kritēriji.

TEORĒMA 11.16. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{k}_1 | ... | \boldsymbol{k}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \boldsymbol{r}_n. \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n, k)$. *Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*

(1) *$\boldsymbol{A} \in GL(n, k)$ ($\boldsymbol{A}$ ir invertējama).*
(2) $\dim \mathcal{N}ull(\boldsymbol{A}) = 0$.
(3) $\underline{\{\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_n\}}$.
(4) $\underline{\{\boldsymbol{k}_1, ..., \boldsymbol{k}_n\}}$.
(5) $\dim R(\boldsymbol{A}) = n$.
(6) $\dim K(\boldsymbol{A}) = n$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\iff r(\mathbf{A}) = n \iff$ 5., 6.

3. $\iff$ 5.,
4. $\iff$ 6..

2. $\iff$ 5.. ■

11.3.6. Apakštelpu summas un šķēluma bāzes.

$\dim(L) < \infty$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. $V, W \leq L$, $\mathcal{G}_V = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ - V veidotājsistēma, $\mathcal{G}_W = \{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$ - W veidotājsistēma. $\mathbf{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} v_{ij}\mathbf{e}_j$, $\mathbf{g}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} w_{ij}\mathbf{e}_j$.

$\mathcal{G}_V$ un $\mathcal{G}_W$ elementu koordinātu kolonnas sakārtosim matricās $\mathbf{V} = [v_{ij}]_{n,m}$ un $\mathbf{W} = [w_{ij}]_{n,l}$. Definēsim $\mathbf{A} = [\mathbf{V} | \mathbf{W}]$.

TEORĒMA 11.17.

(1) $V + W = K(\boldsymbol{A})$.
(2) $V \cap W = \mathcal{N}ull(\boldsymbol{A})$.

PIERĀDĪJUMS
1. Seko no matricas kolonnu telpas definīcijas. $K(\mathbf{A})$ ir V un W bāzu lineārais slēgums.

2. $$[\mathbf{V}|\mathbf{W}]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_m\\ \hline \mu_1\\ \dots\\ \mu_l\end{bmatrix}=\mathbf{0} \iff \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i+\sum_{i=1}^{l}\mu_i\mathbf{g}_i=\mathbf{0} \iff \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i=-\sum_{i=1}^{l}\mu_i\mathbf{g}_i$$

$$\Longrightarrow \forall \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_m\\ \hline \mu_1\\ \dots\\ \mu_l\end{bmatrix}\in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \text{ atbilst } \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i\in V\cap W.$$

$$\forall\ \mathbf{t}\in V\cap W:\mathbf{t}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i=\sum_{i=1}^{l}\rho_i\mathbf{g}_i \text{ atbilst } \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_m\\ \hline -\rho_1\\ \dots\\ -\rho_l\end{bmatrix}\in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}).\ \blacksquare$$

PIEZĪME 11.18. No iepriekšējās teorēmas seko algoritmi apakštelpas summas un šķēluma bāzu atrašanai:

- lai atrast $V+W$ bāzi, ar KEP matrica $\mathbf{A}$ ir jāpārveido kolonnu pakāpienveida formā, nenulles kolonnas veido $V+W$ bāzi;
- lai atrastu $V\cap W$ bāzi, ar REP matrica $\mathbf{A}$ ir jāpārveido rindu pakāpienveida formā, jāatrod $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ bāze.

11.4. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 11.19. Atrast abas pārejas matricas starp "bāzēm" $\mathcal{B}$ un $\mathcal{B}'$. Pārbaudiet vai dotās kopas ir bāzes.

(1) $L=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}'=\{(0,1),(-2,0)\}$;
(2) $L=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$, $\mathcal{B}'=\{(0,1,2),(2,0,-1),(-1,2,4)\}$;
(3) $L=\mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\{\mathbf{E}_{11},\mathbf{E}_{12},\mathbf{E}_{21},\mathbf{E}_{22}\}$, $\mathcal{B}'=\{\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{12},\mathbf{E}_{12}+\mathbf{E}_{22},\mathbf{E}_{22}+\mathbf{E}_{21},\mathbf{E}_{21}+\mathbf{E}_{11}\}$.

VINGRINĀJUMS 11.20. Atrast bāzes apakštelpām $V+W$ un $V\cap W$.

(1) $L=\mathbb{R}^3$, $V=\langle(1,2,3),(-1,2,1)\rangle$,
$W=\langle(0,1,-1),(2,0,-1)\rangle$;
(2) $L=\mathbb{R}^4$, $V=\langle(1,1,0,1),(-1,0,1,2),(1,1,1,1)\rangle$,
$W=\langle(0,1,1,0),(2,0,-1,-1)\rangle$.

VINGRINĀJUMS 11.21. Atrast apakštelpas V papildinošo apakštelpu V^p.

(1) $L=\mathbb{R}^2$, $V=\{(2,-1)\}$;
(2) $L=\mathbb{R}^3$, $V=\{(0,1,-1),(1,0,1)\}$;
(3) $L=\mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, V - antisimetrisku matricu kopa.

VINGRINĀJUMS 11.22. Atrast $\mathbf{l}$ projekciju uz V. Papildinošo apakštelpu izvēlieties patvaļīgi.

(1) $L=\mathbb{R}^2$, $\mathbf{l}=(4,5)$, $V=\langle(-1,1)\rangle$;
(2) $L=\mathbb{R}^3$, $\mathbf{l}=(3,-1,2)$, $V=\langle(1,0,1),(2,-2,3)\rangle$;

(3) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, V - simetrisko matricu kopa.

VINGRINĀJUMS 11.23. $L = \mathcal{M}at(n,k)$. Pierādīt, ka $W = V^p$, atrast $\pi_V(\mathbf{l})$, $\pi_W(\mathbf{l})$ patvaļīgai matricai $\mathbf{l}$.

(1) V - simetriskās matricas, W - stingri augšēji trijstūrveida matricas (ar nullēm uz diagonāles);
(2) V - antisimetriskās matricas, W - augšēji trijstūrveida matricas;
(3) V - simetriskās matricas, W - antisimetriskās matricas.

VINGRINĀJUMS 11.24. k - lauks.

(1) Pierādīt, ka katra k^n apakštelpa ir kādas homogēnas LVS atrisinājumu kopa.
(2) Klasificēt visas k^n apakštelpas - atrast veidu kā savstarpēji viennozīmīgi piekārtot katrai apakštelpai kādu labāk saprotamu matemātisku objektu, piemēram, matricu kādā noteiktā formā.

12. NODAĻA

Faktortelpa

Ir divas pieejas algebrisku struktūru un, vispārīgāk, matemātisku objektu, modeļu u.c. pētīšanā:

- dotās struktūras apakškopu - apakšstruktūru izdalīšana un pētīšana, lineāru telpu gadījumā - apakštelpu pētīšana, šajā pieejā tiek pētītas sākotnējās struktūras daļas;
- dotās struktūras sadalījumu, faktorkopu, faktorstruktūru pētīšana, šajā pieejā sākotnējā struktūra tiek sadalīta daļās, katra daļa tiek uzskatīta par jaunas struktūras elementiem, kas manto noteiktas īpašības no sākotnējās struktūras.

Piemērs 12.1. Visu cilvēku kopa:

- vienas valsts cilvēki - apakšstruktūra,
- valstis kā cilvēku kopas - faktorstruktūra.

12.1. Definīcija

12.1.1. Blakusklases.

L - LT, $V \leq L$. Definēsim $\mathbf{l} \in L$ *V-blakusklasi (blakusklasi mod V, $\boldsymbol{l}+V$, afīno apakštelpu)* šādā veidā:

$$[\mathbf{l}]_V = \mathbf{l} + V = \{\mathbf{x} \in L | \mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v},\ \text{kur } \mathbf{v} \in V\}.$$

Visu blakusklašu kopu mod V apzīmēsim ar L/V. Jebkuru $\mathbf{r} \in \mathbf{l} + V$ sauc par *blakusklases pārstāvi.*

Piezīme 12.2. Dažādiem elementiem var būt sakrītošas blakusklases.

Piemērs 12.3. Vektori. Augšēji trijstūrveida matricas.

Definēsim projekcijas funkciju

$$\pi : L \longrightarrow L/V,$$
$$\pi(\mathbf{l}) = [\mathbf{l}] = \mathbf{l} + V.$$

Teorēma 12.4. *L - LT, $V \leq L$. Tad*

(1) $[\boldsymbol{l}] = [\boldsymbol{l}'] \iff \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}' \in V.$
(2) $[\boldsymbol{l}] = [\boldsymbol{0}] \iff \boldsymbol{l} \in V.$

PIERĀDĪJUMS
1. $[\mathbf{l}] = [\mathbf{l}'] \implies \forall\, \mathbf{v} \in V\ \exists\, \mathbf{v}' \in V :\ \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}' \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{l}' - \mathbf{l} \in V.$

$\mathbf{l}' - \mathbf{l} \in V \implies \mathbf{l} - \mathbf{l}' = \mathbf{v} \implies \mathbf{l} = \mathbf{l}' + \mathbf{v} \implies \forall\, \widetilde{\mathbf{v}} \in V :\ \mathbf{l} + \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{l}' + \underbrace{\mathbf{v}' + \widetilde{\mathbf{v}}}_{\in V}.$

2. $[\mathbf{l}] = [\mathbf{0}] \implies \mathbf{l} - \mathbf{0} = \mathbf{l} \in V$. $\mathbf{l} \in V \implies \mathbf{l} - \mathbf{0} \in V$. ■

Teorēma 12.5. *Blakusklases mod V veido L sadalījumu:*

(1) *$\forall\ \boldsymbol{l} \in L$ pieder vismaz vienai blakusklasei;*
(2) *divu blakusklases vai nu sakrīt, vai arī to šķēlums ir $\varnothing$.*

PIERĀDĪJUMS
1. $\mathbf{l} = \mathbf{l} + \mathbf{0} \in \mathbf{l} + V$.

2. Pieņemsim, ka $\begin{cases} \mathbf{l} + V \neq \mathbf{l}' + V \\ \Big(\mathbf{l} + V\Big) \cap \Big(\mathbf{l}' + V\Big) \neq \emptyset \end{cases}$. $\mathbf{t} \in \Big(\mathbf{l}+V\Big) \cap \Big(\mathbf{l}'+V\Big) \implies \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ \mathbf{t} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}' \end{cases} \implies$
$\mathbf{l}+\mathbf{v} = \mathbf{l}'+\mathbf{v}' \implies \mathbf{l}' = \mathbf{l}+\mathbf{v}''. \implies \forall\, \widetilde{\mathbf{v}} \in V : \begin{cases} \mathbf{l} + \widetilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{l}' - \mathbf{v}'') + \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{l}' + (\widetilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}'') \in \mathbf{l}' + V \\ \mathbf{l}' + \widetilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{l} + \mathbf{v}'') + \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{l} + (\widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'') \in \mathbf{l} + V \end{cases}$
$\implies \mathbf{l} + V = \mathbf{l}' + V$. ■

12.1.2. LVS atrisinājumu interpretācija.

TEORĒMA 12.6. *Ja LVS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ir saderīga, tad tās atrisinājumu kopa ir blakusklase mod $\mathcal{N}ull(\boldsymbol{A})$ $[\boldsymbol{x}_0] = \boldsymbol{x}_0 + \mathcal{N}ull(\boldsymbol{A})$, kur $\boldsymbol{x}_0$ ir patvaļīgs partikulārs atrisinājums.*

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ - divi LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atrisinājumi $\implies \begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b} \end{cases} \implies \underbrace{\mathbf{Ax}_2 - \mathbf{Ax}_2}_{=\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \implies$
$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \implies [\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_2]$.

$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \text{ - LVS } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ atrisinājums} \\ \widetilde{\mathbf{x}} \text{ - LVS } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ atrisinājums} \end{cases} \implies \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x}_0 + \widetilde{\mathbf{x}}$
ir LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atrisinājums. ■

12.1.3. Operācijas ar blakusklasēm.

Definēsim operācijas kopā L/V:
- $[\mathbf{l}] + [\mathbf{u}] = [\mathbf{l} + \mathbf{u}]$;
- $\lambda[\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}]$.

TEORĒMA 12.7. *Operācijas ar blakusklasēm ir definētas korekti - neatkarīgi no blakusklašu pārstāvju izvēles.*

PIERĀDĪJUMS
$\begin{cases} [\mathbf{l}] = [\mathbf{l}'] \\ [\mathbf{u}] = [\mathbf{u}'] \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{l} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in V \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}, \mathbf{w} \in V \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{l} + \mathbf{u} = (\mathbf{l}' + \mathbf{u}') + \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ \lambda\mathbf{l} = \lambda(\mathbf{l}' + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{l}' + \lambda\mathbf{v} \end{cases} \implies$
$\begin{cases} [\mathbf{l} + \mathbf{u}] = [\mathbf{l}' + \mathbf{u}'] \\ [\lambda\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}'] \end{cases}$ ■

12.1.4. Faktortelpa.

TEORĒMA 12.8. *L - k-lineāra telpa, $V \leq L$. Tad L/V ar definētajām operācijām ir k-lineāra telpa (faktortelpa L mod V).*

PIERĀDĪJUMS LT aksiomu pārbaude.

Saskaitīšanas asociativitāte un komutativitāte
$([\mathbf{l}] + [\mathbf{u}]) + [\mathbf{t}] = [\mathbf{l} + \mathbf{u}] + [\mathbf{t}] = [(\mathbf{l} + \mathbf{u}) + \mathbf{t}] = [\mathbf{l} + (\mathbf{u} + \mathbf{t})] = [\mathbf{l}] + [\mathbf{u} + \mathbf{t}] = ([\mathbf{l}] + [\mathbf{u}]) + [\mathbf{t}]$.

$[\mathbf{l}] + [\mathbf{u}] = [\mathbf{l} + \mathbf{u}] = [\mathbf{u} + \mathbf{l}] = [\mathbf{u}] + [\mathbf{l}]$.

Neitrālais elements

$[\mathbf{0}] + [\mathbf{l}] = [\mathbf{l}] + [\mathbf{0}] = [\mathbf{0} + \mathbf{l}] = [\mathbf{l}]$

Inversais elements

$[\mathbf{l}] + [-\mathbf{l}] = [\mathbf{l} - \mathbf{l}] = [\mathbf{0}] \implies -[\mathbf{l}] = [-\mathbf{l}]$.

Lauka darbības aksiomas

- $\lambda([\mathbf{l}]+[\mathbf{u}]) = \lambda[\mathbf{l}+\mathbf{u}] = [\lambda\mathbf{l}+\lambda\mathbf{u}] = = [\lambda\mathbf{l}]+[\lambda\mathbf{u}] = \lambda[\mathbf{l}]+\lambda[\mathbf{u}]$.
- $(\lambda+\mu)[\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}+\mu\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}]+[\mu\mathbf{l}] = \lambda[\mathbf{l}]+\mu[\mathbf{l}]$.
- $1\cdot[\mathbf{l}] = [1\cdot\mathbf{l}] = [\mathbf{l}]$.
- $\lambda\mu[\mathbf{l}] = [\lambda\mu\mathbf{l}] = \lambda[\mu\mathbf{l}] = \lambda(\mu[\mathbf{l}])$.■

12.2. Īpašības

12.2.1. Bāze.

TEORĒMA 12.9.
L - galīgi ģenerēta LT, $V \le L$. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, turpināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B}_L = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_m\}$. Tad $\{[\boldsymbol{f}_1], ..., [\boldsymbol{f}_m]\}$ ir L/V bāze.

PIERĀDĪJUMS
<u>Veidotājsistēma</u>
$\forall\ \mathbf{l} \in L:\ \mathbf{l} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j \implies [\mathbf{l}] = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j\right] = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\lambda_i \mathbf{e}_i\right] + \sum\limits_{j=1}^{m}\left[\mu_j \mathbf{f}_j\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\mathbf{e}_i\right] + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu\left[\mathbf{f}_j\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\left[\mathbf{0}\right] + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j\left[\mathbf{f}_j\right] = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j\left[\mathbf{f}_j\right]$.

<u>Lineārā neatkarība</u>
$\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j\left[\mathbf{f}_j\right] = [\mathbf{0}] \implies \left[\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j\right] = [\mathbf{0}] \implies \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j \in V \implies \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i \mathbf{e}_i$. Ja vismaz viens $\mu_j \ne 0$, tad $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija starp $\mathcal{B}_L$ elementiem $\implies \overline{\mathcal{B}_L}$ - pretruna. ■

12.2.2. Dimensija.

TEORĒMA 12.10. *L - k-lineāra telpa,* $\dim(L) < \infty$, *$V \le L$. Tad*
$$\dim(L/V) = \dim(L) - \dim(V).$$

PIERĀDĪJUMS Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu
$$\begin{cases} \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} \text{ ir } V \text{ bāze} \\ \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\} \text{ ir } L \text{ bāze} \end{cases} \implies \{[\mathbf{f}_1], ..., [\mathbf{f}_m]\} \text{ ir } L/V \text{ bāze} \implies$$
$$\dim(L/V) = m = (n+m) - n = \dim(L) - \dim(V).■$$

PIEMĒRS 12.11. Nenoteiktā integrēšana I LT $k[X]$ ir lineārs attēlojums $I: k[X] \to k[X]/\langle 1\rangle$.

12.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 12.12. Aprakstīt LT L blakusklases mod V un atrast L/V bāzi.
(1) $L = \mathbb{R}^2$, $V = \langle(2,-1)\rangle$.
(2) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $V = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} = 0\}$.

VINGRINĀJUMS 12.13. Dota LVS
$$\begin{cases} X_1 & -2X_2 & +X_3 & = 1 \\ & -X_2 & +X_3 & = 2. \end{cases}$$
Atrast sistēmas matricas nulltelpu N un aprakstīt LVS atrisinājumu kopu kā blakusklasi mod N.

VINGRINĀJUMS 12.14. $\dim(L) < \infty$, $V, W \le L$. Pierādīt vienādību
$$\dim(V+W)/W = \dim V/(V \cap W).$$

VINGRINĀJUMS 12.15. Noteikt, vai faktortelpa L/V ir galīgi ģenerēta.
(1) $L = k[X]$, $V = \{f \in k[X] | \deg(f) \le d\}$.
(2) $L = k[X]$, $V = \{f \in k[X] | f(0) = 0\}$.

VINGRINĀJUMS 12.16. Noteikt, vai faktortelpa L/V ir galīgi ğenerēta.

(1) $L = k^{\mathbb{N}}$, $V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in k^{\mathbb{N}} \mid x_1 = ... = x_d = 0\}$.

(2) $L = k^{\mathbb{N}}$,

$V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in k^{\mathbb{N}} \mid \exists\ d(\mathbf{x}) :\ \forall\ i > d(\mathbf{x})\ x_i = 0\}$ (V satur visas virknes, kurām galīgs skaits elementu nav 0).

(3) $L = \mathbb{C}$ kā $\mathbb{R}$-lineāra telpa, $V = \mathbb{R}$ kā $\mathbb{R}$-lineāra telpa.

(4) $L = \mathbb{R}$ kā $\mathbb{Q}$-lineāra telpa, $V = \mathbb{Q}$ kā $\mathbb{Q}$-lineāra telpa.

13. NODAĻA

Lineārie attēlojumi

13.1. Motivācijas

13.1.1. Abstraktā algebra.

Strādājot ar algebriskām struktūrām, svarīgas ir tās funkcijas, kuras var uzskatīt par elementu pārapzīmēšanas funkcijām, kas saglabā operāciju tabulas. Strādājot ar lineārajām telpām, svarīgas ir funkcijas, kas saglabā abas operācijas.

13.1.2. Matemātiskā modelēšana.

Praktiskajos pielietojumos, dažādu sistēmu vai procesu modelēšanā:

- parasti sistēmas raksturo vairāki skaitliski parametri, tāpēc tās tiek iekodētas kā skaitļu virknes - vektori;
- bieži modelējamās sistēmas parametru virknēm ir jēga definēt saskaitīšanas un reizināšanas ar skaitli operācijas - visas iespējamās virknes var veidot lineāru telpu.

Nereti modelējamo sistēmu pētīšanā figurē funkcijas, kuru darbības rezultātā sistēmas parametri pārveidojas kā lineāras funkcijas no citiem parametriem:

$$(x_1, ..., x_n) \to (\sum_{i=1}^{n} c_{1i}x_i, ..., \sum_{i=1}^{n} c_{ni}x_i).$$

Lineāras funkcijas tiek izmantotas šādu svarīgāko iemeslu dēļ:

- kā *lineārais tuvinājums* jeb *linearizācija* - ar lineāru funkciju palīdzību var *tuvināt* jeb *aproksimēt* patvaļīgas funkcijas (tāpat kā ar taisnēm var tuvināt patvaļīgas līknes),
- kā *superpozīcija* - lineāras funkcijas atbilst vairāku faktoru summai (superpozīcijai) ar niecīgi mazu dažādu faktoru savstarpējo mijiedarbību,
- abi minētie faktori bieži ir svarīgi tad, ja sistēmas parametru izmaiņas ir nelielas.

Šādus sistēmu pārveidojumus var uzskatīt par funkcijām visu iespējamo parametru vektoru kopā.

Šādas funkcijas var pētīt

- *bezkoordinātu formā* - izmantojot LT pamatīpašības, neizmantojot bāzes;
- *koordinātu formā* - fiksējot konkrētas bāzes un apskatot elementu koordinātu izmaiņas.

13.2. Definīcijas

L,V - k-lineāras telpas. Funkciju $f : L \to V$ sauc par *k-lineāru attēlojumu (LA, lineāru morfismu, homomorfismu)*, ja

- $f(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}')$ - *f saglabā saskaitīšanu;*
- $f(\lambda \mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l})$ - *f saglabā reizināšanu.*

Speciālgadījumi:

- LA $L \to L$ sauc par *lineāru operatoru (LO)* vai *endomorfismu.*
- LA $L \to k$ sauc par *lineāru funkcionāli (LF).*
- bijektīvu LA sauc par *lineāru izomorfismu (LI).*

Visu LA $L \to V$ kopu apzīmē ar $\mathcal{H}om(L, V)$.

13.3. Pamatīpašības

TEORĒMA 13.1. *L, V - LT, $f : L \to V$ - LA.*

(1) $f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{l}_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(\boldsymbol{l}_i)$.
(2) $f(\boldsymbol{0}_L) = \boldsymbol{0}_T$.
(3) $f(-\boldsymbol{l}) = -f(\boldsymbol{l})$.

PIERĀDĪJUMS
1.

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{l}_i + \lambda_n \mathbf{l}_n\Big) = \underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big)}_{\text{turpinām pārveidot}} + f(\lambda_n \mathbf{l}_n) =$$

$$\underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big)}_{\text{turpinām pārveidot}} + f(\lambda_{n-1}\mathbf{l}_{n-1}) + f(\lambda_n \mathbf{l}_n) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i \mathbf{l}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{l}_i).$$

2. $f(\mathbf{0}_L) = f(\mathbf{0}_L + \mathbf{0}_L) = f(\mathbf{0}_L) + f(\mathbf{0}_L) \implies f(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_T$.

3. $\underbrace{f(\mathbf{0}_L)}_{=\mathbf{0}_T} = f(\mathbf{l} - \mathbf{l}) = f(\mathbf{l}) + f(-\mathbf{l}) \implies -f(\mathbf{l}) = f(-\mathbf{l})$. ■

13.4. Klasiskie piemēri

13.4.1. Dabiskie lineārie attēlojumi.

Nulles attēlojums

L, V - LT, $\forall\, \mathbf{l} \in L\ O(\mathbf{l}) = \mathbf{0}_T$.

Vienības attēlojums

$\forall\ L$, $\mathrm{id} : L \to L$, $\mathrm{id}(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$.

Apakštelpas iekļaušana

$\forall\ L, L \leq V$, $\iota : L \to V$, $\iota(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$.

Elementa fiksēšana

L - k-lineāra telpa. Fiksēsim $\mathbf{l} \in L$. Definēsim $\chi_{\mathbf{l}} : k \to L$ ar nosacījumu $\chi_{\mathbf{l}}(a) = a \cdot \mathbf{l}$.

Projekcija uz apakštelpu

$L = V \oplus W$. $\forall\, \mathbf{l} \in L :\ \mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, kur $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ ir viennozīmīgi noteikti. Funkcija $\pi_V : L \to V$, $\pi_V(\mathbf{l}) = \mathbf{v}$ ir LA.

Projekcija uz faktortelpu

$\forall L, V \leq L$, $\pi : L \to L/V$, $\pi(\mathbf{l}) = [\mathbf{l}]$.

Funkcionāļi

L - k-lineāra telpa. LA $L \to k$ - funkcionālis.

13.4.2. Vektoru/ģeometriskie attēlojumi.

- Simetrija attiecībā uz taisni vai centru,
- rotācija ap centru,
- homotētija,
- projekcija uz taisni.

13.4.3. Aritmētisko vektoru attēlojumi.

- Elementu kārtības maiņa,
- jebkura elementa aizvietošana ar elementu lineāru kombināciju.

13.4.4. Matricu attēlojumi.

- Transponēšana,
- reizināšana ar fiksētu matricu,
- apakšmatricas izgriešana.

13.4.5. Funkciju attēlojumi.

- Reizināšana ar fiksētu funkciju,
- atvasināšana.

13.5. Lineāro attēlojumu matricu pieraksts

LA tika definēti bezkoordinātu formā. Tagad sāksim uzdot un pētīt LA koordinātu formā - fiksējot bāzes un izmantojot elementu koordinātes. Parasti lineārās algebras lietojumos - dabaszinātnēs, inženierzinātnēs u.c. tiek izmantots koordinātu pieraksts. Ja redzat vektorus vai matricas, tā ir pazīme, ka tiek izmantota lineārā algebra.

13.5.1. Pamatojums.

L, V - LT ar bāzēm $\begin{cases} \mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}. \end{cases}$ Sākot no šīs vietas uzskatīsim, ka ir dotas *sakārtotas bāzes.*

TEORĒMA 13.2. *$f \in \mathcal{H}om(L, V)$, $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. Tad f ir viennozīmīgi noteikts ar tā darbību uz $\mathcal{B}_L$ elementiem.*

PIERĀDĪJUMS

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j \implies f(\mathbf{l}) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} f\Big(\alpha_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j). \blacksquare$$

13.5.2. Definīcija.

Pieņemsim, ka ir dots $f \in Hom(L, V)$:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = f_{11}\mathbf{t}_1 + f_{21}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m1}\mathbf{t}_m \\ f(\mathbf{e}_2) = f_{12}\mathbf{t}_1 + f_{22}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m2}\mathbf{t}_m \\ ... \\ f(\mathbf{e}_n) = f_{1n}\mathbf{t}_1 + f_{2n}\mathbf{t}_2 + ... + f_{mn}\mathbf{t}_m \end{cases}$$

Matricu

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ \hline f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline f_{m1} & f_{m2} & ... & f_{mn} \end{array}\right] = \left[[f(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}_V} \Big| [f(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{B}_V} \Big| ... \Big| [f(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{B}_V} \right]$$

sauc par f matricu attiecībā uz sakārtotajām bāzēm $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$.

PIEZĪME 13.3. Redzam, ka $\mathbf{F}$ j-tā kolonna ir $f(\mathbf{e}_j)$ koordinātu kolonna attiecībā uz sakārtoto bāzi $\mathcal{B}_V$.

PIEZĪME 13.4. Ir jāizšķir 3 gadījumi:

- attēlojums ir starp dažādām LT, bāzes vienmēr ir dažādas,
- attēlojums ir vienā LT, atiecībā uz divām dažādām sakārtotām bāzēm,
- attēlojums ir vienā LT, attiecībā uz vienu bāzi.

PIEMĒRS 13.5. $L = \mathbb{R}^2$, $f : L \to L$ - simetrija attiecība uz x-asi. Izmantosim kanonisko bāzi $\{(1,0),(0,1)\}$. $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2$ $\Longrightarrow$ f matrica attiecībā uz kanonisko bāzi ir $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$.

13.5.3. Lineāra attēlojuma darbības aprēķināšana.

Izmantojot matricu reizināšanas operāciju var aprēķināt $f(\mathbf{l})$, ja ir zināmas $\mathbf{l}$ koordinātes attiecībā uz bāzi $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j.$$

(1) $\mathbf{l}$ reprezentējam kā kolonnas matricu: $[\mathbf{l}]_{\mathcal{B}_L} = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline ... \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]$.

(2) Atrodam

$$f(\mathbf{l}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\sum_{i=1}^{n} f_{ij} \mathbf{t}_i \Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \alpha_j \Big) \mathbf{t}_i \sim \left[\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{1j}\alpha_j \\ \hline ... \\ \hline \sum\limits_{j=1}^{n} f_{nj}\alpha_j \end{array}\right] = \mathbf{F}\mathbf{l}.$$

PIEMĒRS 13.6. $\mathbf{l} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -3 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{F}\mathbf{l} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ \hline -2 \end{array}\right]$.

13.5.4. Klasisko piemēru matricas.

13.5.4.1. *Dabiskie attēlojumi.*

Nulles attēlojums - Nulles matrica.

Vienības attēlojums

$id(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ $\Longrightarrow$ matrica ir $\mathbf{E}_n$.

Elementa fiksēšana

L - k-lineāra telpa, L bāze - $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, k bāze - $\{1\}$. Fiksēsim $\mathbf{l} \in L$. Definēsim

$$\chi_{\mathbf{l}} : k \to L,$$
$$\chi_{\mathbf{l}}(a) = a\mathbf{l}.$$

Ja $\mathbf{l} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$, tad χ matrica ir $\left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline ... \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]$.

Funkcionāļi

L - k-lineāra telpa, LF $\varphi : L \to k$. φ matrica ir $\left[\ \varphi(\mathbf{e}_1) | \ \ ... \ \ | \varphi(\mathbf{e}_n)\ \right]$.

13.5.4.2. *Vektoru/punktu operācijas.* Projekcija uz x-asi: $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

Rotācija ap centru par $\pi/2$: $\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$.

Piezīme 13.7. Lineārās algebras objektu pieraksts matricu, kolonnas matricu vai rindu matricu parasti nozīmē to, ka šie objekti tiek uzdoti attiecībā uz izvēlētām bāzēm. Piemēram, kolonnas matrica parasti ir LT elementa koordinātu kolonna attiecībā uz izvēlētu bāzi.

13.5.5. Lineāro attēlojumu vizualizācija.

13.5.5.1. *Attēlojuma grafs (atkārtojums).*

Attēlojumus var vizualizēt ar *attēlojuma grafa (funkcionālā grafa)* palīdzību: ja ir dots attēlojums $f : A \to B$, tad $\forall\, a \in A$ zīmēsim orientētu šķautni uz $\forall\, b \in f(a)$: $a \dashrightarrow b$.

Piezīme 13.8. Ja attēlojums ir galīgas kopas permutācija, tad attēlojuma grafs sadalās ciklos.

13.5.5.2. *Lineāra attēlojuma matricas grafs.*

Ja ir dots LA $f : L \to V$, tad

- f ir viennozīmīgi noteikts ar savu darbību uz jebkuras L bāzes $\mathcal{B}_L$ elementiem un darbības rezultāts ir izteikts kā V bāzes $\mathcal{B}_V$ lineāra kombinācija, tādējādi ir definēta matrica $\mathbf{F}$;
- $\mathbf{F}$ var piekārtot *matricas grafu.*

Vizualizēsim LA $f : L \to V$, kas ir uzdots ar matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz bāzēm $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$ ar šādu *matricas grafu* $\Gamma(\mathbf{F})$:

- $\Gamma(\mathbf{F})$ virsotņu kopa ir $\mathcal{B}_L \cup \mathcal{B}_V$,
- ja $f(\mathbf{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ji}\mathbf{t}_j$, tad no virsotnes $\mathbf{e}_i$ zīmēsim šķautni ar svaru f_{ji} uz $\forall$ virsotni $\mathbf{t}_j$: $\mathbf{e}_i \overset{f_{ji}}{\dashrightarrow} \mathbf{t}_j$.

Piezīme 13.9. Ir iespējami divi gadījumi - ar divām vai vienu bāzi.

Piemērs 13.10. LA starp dažādām telpām, kas ir uzdots ar matricu $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1 & \alpha \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right]$ atbilst grafs

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{e}_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \mathbf{e}_1 \arrow[dl, "-1"'] \arrow[dr] & \\
\mathbf{t}_3 & & \mathbf{t}_2 & & \mathbf{t}_1
\end{tikzcd}
$$

LO, kas uzdots ar matricu $\left[\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 1 & a \end{array}\right]$ atbilst grafs

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r] & \mathbf{e}_2 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r] & \mathbf{e}_3 \arrow[loop above, "a"]
\end{tikzcd}
$$

13.6. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 13.11.

1.1 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LA $f : L \to V$:

(1) $f(\mathbf{l}) = \mathbf{c}$, kur $\mathbf{c} \in V$ ir fiksēts;

(2) $L = V$, $f(\mathbf{l}) = \mathbf{c} + \beta\mathbf{l}$, kur $\mathbf{c} \in L$ - fiksēts un $\beta \in k$ - fiksēts.

VINGRINĀJUMS 13.12. Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LO $f : k^n \to k^{n'}$:

(1) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, 0, x_1)$;

(2) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2, 0)$;

(3) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3 + 1)$.

VINGRINĀJUMS 13.13. Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LO $f : k[X] \to k[X]$:

(1) $f(p(X)) = p(X)^2 - 1$;

(2) $f(p(X)) = (Xp(X))''$.

VINGRINĀJUMS 13.14. Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LF $f : L \to k$:

(1) $L = k^n$, $f((x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

(2) $L = k[X]$, $f(p) = p(0)p(1)$;

(3) $L = \mathcal{M}at(n, n, k)$, $f(\mathbf{M}) = \det \mathbf{M}$.

VINGRINĀJUMS 13.15. Ir dots LO $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ tāds, ka

$$\begin{cases} f((1, 0, 2)) = (3, -1, 1) \\ f((0, 2, -3)) = (2, 1, 0) \\ f((-1, 1, 0)) = (0, 1, 2). \end{cases}$$

Atrast $f((1, 2, 3))$.

VINGRINĀJUMS 13.16. Atrast doto LA matricas attiecībā uz dotajām bāzēm:

(1) $L = \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3, x_2 - x_1, 0)$, kanoniskā bāze;

(2) $L = \mathbb{C}[X]_3$, $f(p(X)) = (X^2 p(X))''$, monomu bāze;

(3) $L = \mathcal{M}at(2, 2, \mathbb{R})$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^T$, kanoniskā bāze.

VINGRINĀJUMS 13.17. Dota LA f matrica $\mathbf{F}$. Izstrādāt algoritmu, kas nosaka vai f ir injektīvs, sirjektīvs vai bijektīvs.

VINGRINĀJUMS 13.18. Atrast tādu LT V, lai būtu definēts "nenoteiktās integrēšanas" LA $\mathcal{I} : k[X] \to V$.

VINGRINĀJUMS 13.19. Atrast doto LA f matricas attiecībā uz patvaļīgi izvēlētam bāzēm:

(1) $L = \mathcal{M}at(m, n, k)$, $V = \mathcal{M}at(p, n, k)$. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(p, m, k)$- fiksēta matrica. $f : L \to V$: $f(\mathbf{M}) = \mathbf{AM}$;

(2) $L = \mathcal{M}at(n, n, k)$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$- fiksēta matrica. $f : L \to L$: $f(\mathbf{M}) = [\mathbf{A}, \mathbf{M}] \overset{def}{=} \mathbf{AM} - \mathbf{MA}$.

14. NODAĻA

Lineāro attēlojumu īpašības

14.1. Lineārie attēlojumi un apakštelpas

Par LA $f : L \to V$ *attēlu* $Im(f)$ sauc f (kā funkcijas) attēlu:

$$Im(f) = \{\mathbf{y} \in V \mid \exists\, \mathbf{x} \in L : \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} = \bigcup_{\mathbf{x} \in L} f(\mathbf{x}).$$

f rangu $r(f)$ definē kā $\dim Im(f)$.

Par LA $f : L \to V$ *kodolu* $Ker(f)$ sauc $f^{-1}(\mathbf{0})$:

$$Ker(f) = \{\mathbf{x} \in L \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\mathbf{0}).$$

f *nullitāti* $null(f)$ definē kā $\dim Ker(f)$.

Piemērs 14.1. $L = \mathbb{R}^2$, f - projekcija uz x-asi, $Ker(f) = \langle(0,1)\rangle$, $Im(f) = \langle(1,0)\rangle$.
$L = k[x]$, $f(p) = p'$, $Ker(f) = \langle 1 \rangle$, $Im(f) = L$.

Teorēma 14.2. *L, V - LT, $f : L \to V$ - LA.*
(1) f *- injektīvs* $\iff$ $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
(2) f *- sirjektīvs* $\iff$ $Im(f) = V$.
(3) $U \leq L \implies f(U) \leq V$.
(4) $Im(f) \leq V$.
(5) $W \leq V \implies f^{-1}(W) \leq L$.
(6) $Ker(f) \leq L$.

PIERĀDĪJUMS
1. Abos virzienos pierādām kontrapozitīvi.

$Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\} \implies \exists\, \mathbf{t} \neq \mathbf{0} : \ f(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{t}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \implies f$ nav injektīva funkcija.

f nav injektīva $\implies \exists\, \mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2 : \ f(\mathbf{t}_1) = f(\mathbf{t}_2) \implies f(\mathbf{t}_1) - f(\mathbf{t}_2) = f(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{0} \implies$
$\left\{\begin{array}{l} f(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \neq \mathbf{0} \end{array}\right. \implies \mathbf{t}_1 - \mathbf{t} \in Ker(f) \implies Ker(f) \supsetneq \{\mathbf{0}\}$.

2. Seko no attēla definīcijas.

3. $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in L$. Tad $\left\{\begin{array}{l} f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{u}') = f(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \in Im(f) \\ \lambda f(\mathbf{u}) = f(\lambda \mathbf{u}) \in Im(f). \end{array}\right.$

4. $\mathbf{l}, \mathbf{l}' \in Ker(f) : \ f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') = \mathbf{0}_V \implies \left\{\begin{array}{l} f(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}') = \mathbf{0}_v \\ f(\lambda \mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l}) = \lambda \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V. \end{array}\right. \implies$
$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{l} + \mathbf{l}' \in Ker(f) \\ \lambda \mathbf{l} \in Ker(f) \end{array}\right. \implies Ker(f) \leq L.$ ■

14.2. Attēla un kodola īpašības

14.2.1. Attēls un kodols koordinātu formā.

$S \subseteq L$. Ja $\mathbf{S}$ ir S elementu pieraksts koordinātu formā attiecībā uz fiksētu bāzi, tad apzīmēsim to ar $S \sim \mathbf{S}$. $f \in \mathcal{H}om(L, V)$. Ja f matrica attiecībā uz izvēlētām bāzēm ir $\mathbf{F}$, tad apzīmēsim to ar $f \sim \mathbf{F}$.

Teorēma 14.3. *(Im un Ker apraksts koordinātu formā)* L, V - LT, $f \in \mathcal{H}om(L, V)$, $\mathbf{F} = \left[\ \mathbf{k}_n \mid ... \mid \mathbf{k}_n\ \right]$ - f matrica attiecībā uz izvēlētām bāzēm $\mathcal{B}_L$, $\mathcal{B}_V$.

(1) $Im(f) \sim \langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle$ ($\mathbf{F}$ kolonnu telpa).
(2) $Ker(f) \sim \mathcal{N}ull(\mathbf{F})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\forall\ \mathbf{l} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \in L:\ f(\mathbf{l}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) \implies Im(f) = \langle f(\mathbf{e}_1), ..., f(\mathbf{e}_n) \rangle$. Bet $\mathbf{F}$ kolonnas ir $f(\mathbf{e}_i)$ koordinātu kolonnas.

2. Koordinātu formā $f(\mathbf{l}) \sim \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$. $f(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \implies Ker(f) \sim \mathcal{N}ull(\mathbf{F})$. ■

14.2.2. Attēla un kodola dimensiju īpašība.

Teorēma 14.4. *L, V - LT, $f: L \to V$ - LA.* $\dim(L) < \infty \implies$

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim L.$$

PIERĀDĪJUMS

Izvēlēsimies $Ker(f) = K$ bāzi $\mathcal{B}_K = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$. Papildināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_m\}$. Pierādīsim, ka $f(\mathcal{B}_L \backslash \mathcal{B}_K) = \{f(\mathbf{g}_1), ..., f(\mathbf{g}_m)\}$ ir $Im(f)$ bāze.

<u>Veidotājsistēma</u>

$\mathbf{t} \in Im(f) \iff \exists\ \mathbf{l} \in L:\ \mathbf{t} = f(\mathbf{l})$. $\mathbf{l} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j \implies \mathbf{t} = f(\mathbf{l}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{f(\mathbf{e}_i)}_{=\mathbf{0}} + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j f(\mathbf{g}_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j f(\mathbf{g}_j)$.

<u>Lineārā neatkarība</u>

$\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j f(\mathbf{g}_j) = \mathbf{0} \implies f\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j\right) = \mathbf{0} \implies \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j \in Ker(f) \implies \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i$. Ja vismaz viens no $\mu_j \neq 0$, tad $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija, kas saista $\mathcal{B}_L$ elementus $\implies \overline{\mathcal{B}_L}$ - pretruna. ■

14.2.3. Izomorfisma teorēma.

Teorēma 14.5. *L, V - LT, $f: L \to V$ - LA. Tad*

$$Im(f) \simeq L/Ker(f).$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $Ker(f)$ ar K. Definēsim funkciju $\tilde{f}: L/Ker(f) \to V$ ar nosacījumu $\tilde{f}(l + K) = f(l)$. Pierādīsim, ka $\tilde{f}$ ir korekti definēts lineārs izomorfisms.

■

14.3. Operācijas ar lineārajiem attēlojumiem

14.3.1. Lineārās īpašības.

Kopā $\mathcal{H}om(L,V)$ var definēt šādas *lineāras operācijas:*

- summu: $(f,g)\to f+g$:
$$(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x});$$
- reizināšanu ar lauka elementu: $(\lambda, f)\to \lambda f$:
$$(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

Var pārbaudīt, ka šo operāciju rezultāti ir lineāri attēlojumi. /

TEORĒMA 14.6. *L, V - k-lineāras telpas. Tad $\mathcal{H}om(L,V)$ ir k-lineāra telpa.*

PIERĀDĪJUMS Jāpārbauda visas LT aksiomas.

Asociativititāte

$((f+g)+h)(\mathbf{x}) = (f+g)(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}) =$
$f(\mathbf{x}) + (g+h)(\mathbf{x}) = (f+(g+h))(\mathbf{x})$.

Komutativitāte

$(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = (g+f)(\mathbf{x})$.

Neitrālais elements $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Inversais elements $(-f)(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

Lauka darbība

- $(\lambda(f+g))(\mathbf{x}) = (\lambda f)(\mathbf{x}) + (\lambda g)(\mathbf{x})$,
- $((\lambda+\mu)f)(\mathbf{x}) = (\lambda f)(\mathbf{x}) + (\mu f)(\mathbf{x})$,
- $(1\cdot f)(\mathbf{x}) = 1\cdot f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$,
- $((\lambda\mu)f)(\mathbf{x}) = (\lambda(\mu f)(\mathbf{x})$.■

14.3.2. Kompozīcija.

L, T, Z - k-lineāras telpas, $\left\{\begin{array}{l} f: L\to T \\ g: T\to Z\end{array}\right.$ - LA. Var definēt *lineāro attēlojumu kompozīciju* $g\circ f$:

$$g\circ f : L\to Z,$$
$$(g\circ f)(\mathbf{l}) = g(f(\mathbf{l})).$$

PIEMĒRS 14.7. $L=T=Z=k[X]$, $f(p) = X\cdot p$, $g(q) = q'$,
$(g\circ f)(p) = (X\cdot p)'$.

TEORĒMA 14.8. *L, T, Z - k-lineāras telpas, $\left\{\begin{array}{l} f: L\to T \\ g: T\to Z\end{array}\right.$ - LA. Tad $g\circ f : L\to Z$ ir LA.*

PIERĀDĪJUMS
$(g\circ f)(\mathbf{l}+\mathbf{u}) = g\Big(f(\mathbf{l}+\mathbf{u})\Big) = g\Big(f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{u})\Big) = g\Big(f(\mathbf{l})\Big) + g\Big(f(\mathbf{u})\Big) =$
$= (g\circ f)(\mathbf{l}) + (g\circ f)(\mathbf{u})$.

$(g\circ f)(\lambda\mathbf{l}) = g(f(\lambda\mathbf{l})) = g(\lambda f(\mathbf{l})) = \lambda g(f(\mathbf{l})) = \Big(\lambda(g\circ f)\Big)(\mathbf{l})$. ■

14.4. Lineārie attēlojumi un matricas

14.4.1. Lineāro attēlojumu un matricu atbilstība.

TEORĒMA 14.9. *L, V - LT, $\mathcal{B}_L = \{e_1, ..., e_n\}$ - L bāze.*
Tad $\forall\ f_0 \in \mathcal{F}un(\mathcal{B}_L, V)\ \exists\ f \in \mathcal{H}om(L, V)$:

$$f(e_i) = f_0(e_i), \forall i.$$

($\forall$ funkciju $f : \mathcal{B}_L \to V$ var turpināt līdz LA $f : L \to V$)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\iota"] & V \\ L \arrow[ur, dotted, "f"] & \end{tikzcd}$$

PIERĀDĪJUMS $\forall\ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i \in L$ definēsim funkciju $f : L \to V$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_0(\mathbf{e}_i).$$

<u>f ir LA</u>

$$f(\mathbf{l}+\mathbf{u}) = f\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i}_{=\mathbf{l}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i}_{=\mathbf{u}}\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\mathbf{e}_i\Big) == \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i) f_0(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_0(\mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_0(\mathbf{e}_i) == f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{u}).$$

<u>$f(\mathbf{e}_i) = f_0(\mathbf{e}_i)$</u> - uzreiz redzams no definīcijas. ■

14.4.2. Lineāro operāciju realizācija ar matricām.

TEORĒMA 14.10. *L, V - LT ar fiksētam bāzēm, $f, g \in \mathcal{H}om(L, V)$ ar matricām $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$. Tad*
(1) $f + g$ matrica ir $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$.
(2) λf matrica ir $\lambda \boldsymbol{F}$.

PIERĀDĪJUMS
1. $(f+g)(\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i)+g(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}\mathbf{t}_j + \sum_{j=1}^{n} g_{ji}\mathbf{t}_j = \sum_{j=1}^{n}(f_{ji}+g_{ji})\mathbf{t}_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\mathbf{t}_j \implies \mathbf{S} = \mathbf{F}+\mathbf{G}.$

2. $(\lambda f)(\mathbf{e}_i) = \lambda f(\mathbf{e}_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} f_{ji}\mathbf{t}_j = \sum_{j=1}^{n}(\lambda f_{ji})\mathbf{t}_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}\mathbf{t}_j \implies \mathbf{M} = \lambda\mathbf{F}.$ ■

14.4.3. Kompozīcijas realizācija ar matricām.

TEORĒMA 14.11. *L, T, Z - LT, $\begin{cases} f \in Hom(L, T) \text{ ar matricu } \boldsymbol{F} \\ g \in Hom(T, Z) \text{ ar matricu } \boldsymbol{G}. \end{cases}$*
Tad $g \circ f$ matrica ir $\boldsymbol{GF}$.

PIERĀDĪJUMS Izmantosim apzīmējumus $\mathbf{F} = \{f_{ij}\}$, $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$, $\mathbf{H} = \{h_{ij}\} = \mathbf{GF}$.

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} f_{ji}\mathbf{t}_j \\ g(\mathbf{t}_j) = \sum\limits_{k=1}^{l} g_{kj}\mathbf{z}_k. \end{cases} \Longrightarrow (g\circ f)(\mathbf{e}_i) = g\Big(f(\mathbf{e}_i)\Big) = g\Big(\sum_{j=1}^{m} f_{ji}\mathbf{t}_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji}g(\mathbf{t}_j) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji}\Big(\sum_{k=1}^{l} g_{kj}\mathbf{z}_k\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{l} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m} g_{kj}f_{ji}\Big)}_{=h_{ki}} \mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{l} h_{ki}\mathbf{z}_k. \blacksquare$$

14.5. Bāzes maiņa un lineārie attēlojumi

14.5.1. Atkārtojums.

L - LT, $\dim(L) = n$,

$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$,

$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ - divas sakārtotas L bāzes.

Izteicām katras bāzes elementus kā otras bāzes lineāras kombinācijas, ieguvām divas matricas:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + ... + a_{n1}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + ... + a_{n2}\mathbf{e}_n \\ ... \\ \mathbf{e}'_n = a_{n1}\mathbf{e}_1 + ... + a_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases} \rightleftarrows \mathbf{A}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}'_1 + ... + s_{n1}\mathbf{e}'_n \\ \mathbf{e}_2 = s_{12}\mathbf{e}'_1 + ... + s_{n2}\mathbf{e}'_n \\ ... \\ \mathbf{e}_n = s_{1n}\mathbf{e}'_1 + ... + s_{nn}\mathbf{e}'_n \end{cases} \rightleftarrows \mathbf{S}$$

Secinājām, ka

- $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{S}$ (*pārejas matrica*), $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}$,
- $\begin{cases} \mathbf{l} \sim \mathbf{c} \text{ bāzē } \mathcal{B} \\ \mathbf{l} \sim \mathbf{c}' \text{ bāzē } \mathcal{B}' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} \\ \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}'. \end{cases}$

14.5.2. Lineāra operatora bāzes maiņa pārejot uz citām bāzēm.

L, V - galīgi ģenerētas LT, pieņemsim, ka katrā no telpām ir izvēlētas divas bāzes - "sākotnējā" un "mainītā":

$$\begin{cases} \mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \mathcal{B}'_L = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\} \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}, \mathcal{B}'_V = \{\mathbf{t}'_1, ..., \mathbf{t}'_m\} \end{cases}$$

Apzīmēsim pārejas matricas ar $\mathbf{S}$ un $\mathbf{T}$:

$$\begin{cases} L: \ \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c}, \mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}' \\ V: \ \mathbf{c}' = \mathbf{T}\mathbf{c}, \mathbf{c} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{c}' \end{cases}$$

Dots $f \in \mathcal{H}om(L, V)$, tā matrica attiecībā uz $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$ ir $\mathbf{F}$.

Atradīsim f matricu $\mathbf{F}'$ attiecībā uz bāzēm $\mathcal{B}'_L$ un $\mathcal{B}'_V$:

- $\mathbf{l} \sim \mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}'_L \Longrightarrow \mathbf{l} \sim \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}_L$,
- $f(\mathbf{l}) \sim \mathbf{F}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}') = (\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}_V$,
- $f(\mathbf{l}) \sim \mathbf{T}(\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{c}' = (\mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}'_V$

Seko, ka $\mathbf{F}' = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1}$.

PIEZĪME 14.12. Ja $L = V$, un dotas divas bāzes $\mathcal{B}_L$,$\mathcal{B}'_L$ ar pārejas matricu $\mathbf{S}$, tad $\mathbf{F}' = \mathbf{S}\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1}$.

Šādā gadījumā $\det(\mathbf{F}') = \det(\mathbf{S}\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1}) = \det(\mathbf{S})\det(\mathbf{F})\det(\mathbf{S}^{-1}) =$
$\underbrace{\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{S}^{-1})}_{=1}\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F})$.

PIEMĒRS 14.13. $\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{S}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$
$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & -2 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right] \implies \mathbf{F}' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 3 & 0 \end{array}\right]$.

14.5.3. Bāzes maiņas interpretācija ar lineārajiem attēlojumiem (neobligātais materiāls).

Izsakām vienas bāzes elementus kā otras bāzes lineāras kombinācijas, iegūstam pārejas matricu:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathrm{id}(\mathbf{e}'_1) = a_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 = \mathrm{id}(\mathbf{e}'_2) = a_{12}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n \\ \ldots \\ \mathbf{e}'_n = \mathrm{id}(\mathbf{e}'_n) = a_{n1}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases} \leftrightarrows \mathbf{A}$$

Seko, ka
- $\mathbf{A}$ ir vienības attēlojuma $id : L(\mathcal{B}') \to L(\mathcal{B})$ matrica attiecībā uz norādītajām bāzēm;
- $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{S}$ ir vienības attēlojuma $\mathrm{id} : L(\mathcal{B}) \to L(\mathcal{B}')$ matrica attiecībā uz norādītajām bāzēm;
- līdzīgi spriedumi ir attiecībā uz V.

Lai atrastu f matricu $\mathbf{F}'$ attiecībā uz bāzēm B'_L un B'_T, attēlosim visus attēlojumus vienā diagrammā:

$$\begin{tikzcd} L(\mathcal{B}_L) \arrow[r, "f\sim\mathbf{F}"] & V(\mathcal{B}_V) \arrow[d, "\mathrm{id}\sim\mathbf{T}"] \\ L(\mathcal{B}'_L) \arrow[u, "\mathrm{id}\simeq\mathbf{S}^{-1}"] \arrow[r, "f\sim\mathbf{F}'"] & V(\mathcal{B}'_V) \end{tikzcd}$$

Redzam, ka, pāriet no $L(\mathcal{B}'_L)$ uz $V(\mathcal{B}'_V)$ var divos veidos:

$$f = \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id} \implies \mathbf{F}' = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1}.$$

14.6. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 14.14. L - LT, $U \leq L$. Pierādīt, ka
(1) $\exists\, f \in \mathcal{E}nd(L)$: $Im(f) = U$,
(2) $\exists\, g \in \mathcal{E}nd(L)$: $Ker(f) = U$.

VINGRINĀJUMS 14.15. Atrast LA f attēlus un kodolus.
(1) $L = k^3$, $f : L \to k$, $f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_3$;
(2) $L = k^3$, $f : L \to L$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 3 \end{array}\right]$, kanoniskajā bāzē;
(3) $L = k[X]_3$, $f(p) = p'$;
(4) $L = \mathcal{M}at(2, 2, k)$, $f : L \to L$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\mathbf{E}_{12}$.

VINGRINĀJUMS 14.16. Atrast LO matricu pēc bāzes maiņas.

(1) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_L$ - kanoniskā bāze, $\mathcal{B}'_L = \{(2,-1),(3,4)\}$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 5 & 4 \end{array}\right]$;

(2) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_L$ - kanoniskā bāze, $\mathcal{B}'_L = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$;

(3) $L = \mathbb{R}[X]_2$, $\mathcal{B}_L$ - monomu bāze, $\mathcal{B}'_L = \{1, X+1, X^2+X+1\}$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & -4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 2 \\ \hline 2 & -2 & 2 \end{array}\right]$.

Vingrinājums 14.17. Atrast LA matricu pēc bāzes maiņas abās LT.

(1) $L = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$ - kanoniskās bāzes,

$$\mathcal{B}'_L = \{(3,-2),(2,0)\},\ \mathcal{B}'_V = \{(0,0,1),(0,1,1),(-1,1,1)\},\ \mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right];$$

(2) $L = \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$ - kanoniskās bāzes,
$\mathcal{B}'_L = \{(3,-2,2,-2),(-4,3,-2,0),(2,-1,1,0),(1,0,0,1)\}$, $\mathcal{B}'_V = \{(2,3),(3,4)\}$,
$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -80 & 6 & 169 & 44 \\ \hline 60 & -4 & -126 & -33 \end{array}\right]$.

Vingrinājums 14.18. Atrodiet piemēru LT L un $f \in \mathcal{E}nd(L)$, kuriem

$$L \neq Ker(f) + Im(f).$$

Vingrinājums 14.19. $f \in \mathcal{E}nd(V)$. $\mathcal{A}nn(f) = \{g \in \mathcal{E}nd(L) |\ g \circ f = \mathbf{0}\}$. Pierādīt, ka $\mathcal{A}nn(f) \subseteq \mathcal{E}nd(L)$, atrast tā dimensiju un bāzi.

15. NODAĻA

Lineāri izomorfismi

15.1. Pamatfakti

Bijektīvu LA sauc par *lineāru izomorfismu (LI)*. Ja $\exists$ LI $f : L \to V$, tad saka, ka L un V ir *izomorfas* LT $(L \simeq V)$.

PIEZĪME 15.1. Par LI var domāt kā par funkciju, kas pārapzīmē elementus, operāciju tabulas saglabājas.

PIEMĒRS 15.2. id, vektoru simetrija un rotācija, matricas transponēšana, $f : k^4 \longrightarrow \mathcal{M}at(2,k)$ - $f((x,y,z,t)) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

TEORĒMA 15.3.

(1) $\left\{ \begin{array}{l} f \in Hom(L,V) \text{ - } LI \\ g \in Hom(V,Z) \text{ - } LI \end{array} \right. \implies g \circ f \in Hom(L,Z)$ *ir LI.*

(2) $f \in Hom(L,V)$ *- LI* $\iff$ $f^{-1} \in Hom(V,L)$*- LI.*

(3) f *- LI* $\iff$ f *matricas attiecībā uz* $\forall$ *bāzēm ir invertējamas.*

(4) f *- LI ar matricu* $\boldsymbol{F}$ $\implies$ f^{-1} *matrica ir* $\boldsymbol{F}^{-1}$.

(5) $\forall$ *LT L:* $\mathrm{id} : L \to L$ *ir LI.*

PIERĀDĪJUMS

1. Agrāk tika pierādīts, ka $g \circ f$ ir LA. Bijektīvu funkciju kompozīcija ir bijektīva funkcija $\implies$ $g \circ f$ ir LI.

2. $f : L \to V$ ir bijektīva funkcija $\implies$ $f^{-1} : V \to L$ ir bijektīva funkcija. Jāpierāda, ka f^{-1} ir LA.

$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V\ \exists\ \mathbf{l}, \mathbf{l}' \in L : \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{l}) = \mathbf{v}, f^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{l} \\ f(\mathbf{l}') = \mathbf{v}', f^{-1}(\mathbf{v}') = \mathbf{l}'. \end{array} \right.$

$f^{-1}(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v}) = f^{-1}(f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}'))) = f^{-1}(f(\mathbf{l}+\mathbf{l}')) = (f^{-1} \circ f)(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = \mathrm{id}(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = \mathbf{l}+\mathbf{l}' = f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v})$.

$f^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = f^{-1}(\lambda f(\mathbf{l})) = f^{-1}(f(\lambda\mathbf{l})) = \lambda\mathbf{l} = \lambda f^{-1}(\mathbf{v})$.

3. $\exists$ bāze: f matrica $\mathbf{F}$ nav invertējama $\implies$ $\mathcal{N}ull(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\iff$ $Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\implies$ f nav injektīvs.

f nav LI $\implies$ f nav injektīvs vai f nav sirjektīvs.

f nav injektīvs $\iff$ $Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\iff$ $\mathcal{N}ull(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\iff$ $\mathbf{F}$ nav invertējama.

f nav sirjektīvs $\implies$ $\forall\ \mathbf{F}$: $\dim Im(f) = \dim\langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n\rangle < n$. Bet $\dim\langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n\rangle = r(\mathbf{F}) < n$ $\implies$ $\mathbf{F}$ nav invertējama.

4. f^{-1} matrica ir $\mathbf{G}$ $\implies$ $\mathbf{GF} = \mathbf{E}_n$ $\implies$ $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}$.

5. id matrica ir $\mathbf{E}_n$. ■

15.2. Lineāru telpu klasifikācija

Kad divus matemātiskus objektus var uzskatīt par līdzīgiem pēc struktūras ignorējot nebūtiskas detaļas (apzīmējumus, attēlošanas veidu u.c)?

- skaitļi - vienādība,
- kopas - elementu skaits,
- ģeometriskas figūras - kongruence, varbūt līdzība.

Kad divas LT uzskatīt par līdzīgām pēc struktūras?

- laukiem jābūt vienādiem ($\mathbb{Q}$-lineāra telpa un $\mathbb{C}$-lineāra telpa ir dažādas),
- dimensijām jābūt vienādām (plakne un telpa ir dažādas),
- vai ar to pietiek?

TEORĒMA 15.4. *L - k-lineāra LT,* $\dim(L) = n$. *Tad*

$$\boxed{L \simeq k^n.}$$

PIERĀDĪJUMS Uzrādīsim LI $L \to k^n$.

Izvēlēsimies LT L bāzi $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.
LT k^n izvēlēsimies kanonisko bāzi $\mathcal{B}_{k^n} = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n\}$,kur

$$\mathbf{s}_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i-\text{tajā vietā}}, ..., 0)$$

Definēsim $f : L \to k^n$ šādi:

(1) definēsim funkciju $f_0 : \mathcal{B}_L \to \mathcal{B}_{k^n}$:

$$f_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{s}_i.$$

(2) turpināsim f_0 līdz LA $f : L \to k^n$:

$$f(\mathbf{l}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{s}_i.$$

Jāpierāda, ka f ir bijektīva funkcija.

<u>Sirjektivitāte</u>

$\forall\ w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{s}_i \in k^n$ izpildās $w = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i\Big) \implies w \in Im(f)$.

<u>Injektivitāte</u>

$f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') \implies f(\mathbf{l} - \mathbf{l}') = \mathbf{0}$.

$\mathbf{l} - \mathbf{l}' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i \implies f\Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0} \implies \forall\ i\ \gamma_i = 0 \implies \mathbf{l} - \mathbf{l}' = \mathbf{0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i \mathbf{l} = \mathbf{l}'$.

■

TEORĒMA 15.5. *k - lauks, $n, m \in \mathbb{N}$. Tad*

$$n \neq m \implies k^n \not\simeq k^m.$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $n > m$.

$f \in \mathcal{H}om(k^n, k^m) \implies \dim Im(f) + \dim Ker(f) = \dim(k^n) = n$

$\implies \underbrace{\dim Im(f)}_{\leq m < n} \leq n \implies \dim Im(f) < n \implies \dim Ker(f) > 0 \implies f$ nav injektīvs. ■

PIEZĪME 15.6. Seko, ka k^n var uzskatīt par LT struktūras etalonu.

TEORĒMA 15.7. *L, V - k-lineāras LT. Tad*

$$L \simeq V \iff \dim L = \dim V.$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\dim L = n$, $\dim V = m$. Saskaņā ar teorēmu par LT izomorfismu ar vektoru telpu $\begin{cases} L \simeq k^n \\ V \simeq k^m \end{cases}$.

$$n = m \implies \begin{cases} \exists\, \varphi : L \to k^n \\ \exists\, \psi : V \to k^n \end{cases} \implies \psi^{-1} \circ \varphi : L \to V \text{ ir LI:}$$

$$\begin{tikzcd}
& k^n \arrow[dr, bend left, "\psi^{-1}"] & \\
L \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\circ\varphi"] & & V \arrow[ul, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

$n \neq m \implies L \not\simeq V$ izmantojot tādu pašu argumentāciju kā iepriekšējā teorēmā. ∎

16. NODAĻA

Lineāro attēlojumu un operatoru struktūra

16.1. Lineārā attēlojuma struktūra

TEORĒMA 16.1. *$f : L \to V$ - LA.*

(1) *LT L un V eksistē sadalījumi tiešajās summmās*

$$L = Ker(f) \oplus L_1,$$

$$T = V_0 \oplus Im(f)$$

tādi, ka f sašaurinājums uz L_1 ir izomorfisms uz $Im(f)$.

(2) *$\exists$ tādas L un V bāzes, attiecībā uz kurām f matrica ir normālajā formā*

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{nm} \\ \hline \boldsymbol{O}_{ln} & \boldsymbol{O}_{lm} \end{array}\right], \quad kur \quad \begin{cases} n = \dim L_1 = \dim Im(f) \\ m = \dim Ker(f) \\ l = \dim T_0. \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

1. Saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu $\exists$ papildinošās apakštelpas $\begin{cases} L_1 = Ker(f)^p \\ T_0 = Im(f)^p \end{cases}$ tādas, ka

$$\begin{cases} Ker(f) \oplus L_1 = L, \\ Ker(f) \cap L_1 = \{\mathbf{0}_L\} \end{cases} \begin{cases} T_0 \oplus Im(f) = T \\ T_0 \cap Im(f) = \{\mathbf{0}_T\} \end{cases}$$

Pierādīsim, ka f sašaurinājums uz L_1 ir LI $L_1 \to Im(f)$.

<u>Injektivitāte</u> $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') \implies f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in Ker(f)$.

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in L_1 \implies \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L_1 \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in Ker(f) \end{cases} \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{0}, \text{ jo } Ker(f) \cap L_1 = \{\mathbf{0}\}.$$

<u>Sirjektivitāte</u> $\forall\ \mathbf{y} \in Im(f)\ \exists\ \mathbf{x} \in L$ tāds, ka $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

$L = Ker(f) \oplus L_1 \implies \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}_0}_{\in Ker(f)} + \underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in L_1}. \implies f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$.

2. Izvēlēsimies L_1 bāzi $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $Ker(f)$ bāzi $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_{n+1}, ..., \mathbf{e}_{n+m}\}$
$\implies \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_0$ ir bāze telpai L.

Definēsim $\mathbf{t}_i = f(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$. Kopa $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_n\}$ veido bāzi apakštelpai $Im(f)$ - tas tika agrāk pierādīts teorēmā par kodola un attēla dimensiju summu. Izvēlēsimies jebkuru bāzi $\mathcal{B}_4$ telpai T_0 un izveidosim bāzi $\mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$ telpai T. Pārbaudīsim, ka attiecībā uz bāzēm $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ un $\mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$ dotā f matrica ir pareiza:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{t}_i, \forall\ 1 \leq i \leq n, \\ f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}, \forall\ n+1 \leq i \leq n+m. \blacksquare \end{cases}$$

16.2. Lineāra operatora struktūra

Pētīsim LO. Apskatīsim $f \in \mathcal{E}nd(L)$. Iepriekšējās sadaļas teorēma ir spēkā, bet tai nav lielas nozīmes, jo parasti LO tiek uzdoti attiecībā uz vienu bāzi.

16.2.1. Invariantās apakškopas.

$f : A \longrightarrow A$ - funkcija. $S \subseteq A$ sauc par *f-invariantu apakškopu*, ja
$$\forall\ s \in S:\ \ f(s) \in S$$
Simboliski to apzīmē kā $f(S) \subseteq S$.

Piemērs 16.2. f - A permutācija, invariantās apakškopas - cikli.
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = x + 1$, invariantas apakškopas ir $\mathbb{N}_m = \mathbb{N}\backslash\{1, ..., m-1\}$.

16.2.2. Invariantās apakštelpas.

$f \in \mathcal{E}nd(L)$. $V \leq L$ sauc par *invariantu apakštelpu (f-invariantu apakštelpu, IA)*, ja V ir f-invarianta apakškopa:
$$\mathbf{v} \in V \implies f(\mathbf{v}) \in V, \text{ citiem vārdiem - } f(V) \subseteq V.$$
Visu f-invariantu apakštelpu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{I}nv(f, L)$.

Piemērs 16.3. $\forall\ f \in \mathcal{E}nd(L)\ \exists$ vismaz divas IA - L, $\{\mathbf{0}\}$.
$L = \mathbb{R}^2$, f - simetrija attiecībā uz x-asi - $\langle(1, 0)\rangle$ ir IA,
f - rotācija par $\alpha \neq 0$ - nav citu IA.

Teorēma 16.4. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.*
(1) $V \in \mathcal{I}nv(f) \implies$ *f sašaurinājums uz V ir LA $V \to V$.*
(2) $V, V' \in \mathcal{I}nv(f, L) \implies \begin{cases} V \cap V' \in \mathcal{I}nv(f, L) \\ V + V' \in \mathcal{I}nv(f, L). \end{cases}$
(3) $V \in \mathcal{I}nv(f, L) \implies \exists$ *L bāze, attiecību uz kuru f matrica ir bloku augšēji trijstūrveida formā*
$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right], \text{ kur } \mathbf{A} \text{ ir } \dim V \times \dim V \text{ matrica.}$$
(4) $Ker(f), Im(f) \in \mathcal{I}nv(f)$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\mathbf{v} \in V \implies f(\mathbf{v}) \in V \implies f(V) \subseteq V \implies f$ sašaurinājums uz V ir korekti definēta funkcija. LA aksiomas izpildās.

2. $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \in V' \implies f(\mathbf{v}) \in V \cap V'$.
$\mathbf{v} \in V, \mathbf{v}' \in V' \implies f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \underbrace{f(\mathbf{v})}_{\in V} + \underbrace{f(\mathbf{v}')}_{\in V'} \in V + V'$.

3. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$. Papildināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-m}\}$.

$\forall\ i \in \{1, ..., m\}:\ \ f(\mathbf{e}_i) \in \langle\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\rangle \implies$
$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = \underbrace{f_{11}\mathbf{e}_1 + ... + f_{m1}\mathbf{e}_m}_{\mathbf{A}\text{ bloks}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{g}_1 + ... + 0 \cdot \mathbf{g}_{n-m}}_{\mathbf{O}\text{ bloks}} \\ f(\mathbf{e}_2) = \underbrace{f_{12}\mathbf{e}_1 + ... + f_{m2}\mathbf{e}_m}_{\mathbf{A}\text{ bloks}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{g}_1 + ... + 0 \cdot \mathbf{g}_{n-m}}_{\mathbf{O}\text{ bloks}} \\ ... \\ f(\mathbf{e}_m) = \underbrace{f_{1m}\mathbf{e}_1 + ... + f_{mm}\mathbf{e}_m}_{\mathbf{A}\text{ bloks}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{g}_1 + ... + 0 \cdot \mathbf{g}_{n-m}}_{\mathbf{O}\text{ bloks}} \end{cases}$$
$\implies$ attiecībā uz $\mathcal{B}_L$ f matrica ir norādītajā formā, kur $\mathbf{A}$ ir $m \times m$ matrica.

4. $\mathbf{l} \in Ker(f) \iff f(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \implies f(f(\mathbf{l})) = \mathbf{0} \implies f(Ker(f)) \subseteq Ker(f)$.

$\mathbf{l} \in Im(f) \implies f(\mathbf{l}) \in Im(f) \implies f(Im(f)) \subseteq Im(f)$. ■

16.2.3. Īpašvektori un īpašvērtības.

L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.

$\mathbf{l} \in L, \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, sauc par f *īpašvektoru*, ja $\langle \mathbf{l} \rangle$ ir f-invarianta apakštelpa. Citiem vārdiem, sakot:

- $\exists\, \lambda \in k : f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l}$ (bezkoordinātu formā),
- $\begin{cases} \mathbf{l} \sim \mathbf{c} \\ f \sim \mathbf{F} \end{cases} \implies \mathbf{F}\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$, attiecībā uz $\forall\ L$ bāzi (koordinātu formā).

Šajos terminos λ sauc par f *īpašvērtību*, kas atbilst $\mathbf{l}$. $\forall$ īpašvektoram $\mathbf{l}$ īpašvērtība ir noteikta viennozīmīgi. Visu īpašvektoru kopu ar īpašvērtību λ apzīmē ar L^λ. Visu f īpašvērtību kopu sauc par f *spektru* ($\mathcal{S}pec(f)$).

$f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l} \implies f(c\mathbf{l}) = cf(\mathbf{l}) = c\lambda \mathbf{l} = \lambda(c\mathbf{l}) \implies$

$$\mathbf{l} \in L^\lambda \implies c\mathbf{l} \in L^\lambda.$$

Piemērs 16.5. $L = \mathbb{R}^2$, f - simetrija attiecībā uz x-asi. $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.
$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \implies \mathbf{e}_1 \in L^1$, $f(\mathbf{l}_2) = -\mathbf{e}_2 \implies \mathbf{e}_2 \in L^{-1}$.

Par matricas $\mathbf{M} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$ *raksturīgo polinomu* $R_{\mathbf{M}}(\lambda)$ sauksim polinomu

$$\det(\lambda \mathbf{E}_n - \mathbf{M}) = 0.$$

Vienādojumu $R_{\mathbf{M}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E}_n - \mathbf{M}) = 0$ sauc par matricas $\mathbf{M}$ *raksturīgo vienādojumu.*

Teorēma 16.6. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*
(1) $\lambda \in \mathcal{S}pec(f)$.
(2) $Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\boldsymbol{0}\}$.
(3) $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}) = 0$, *kur $\boldsymbol{F}$ ir f matrica attiecībā uz patvaļīgu L bāzi.*

PIERĀDĪJUMS
<u>1. $\iff$ 2.</u>

$\lambda \in \mathcal{S}pec(f) \iff \exists\, \mathbf{l} \in L: \ f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l} = \lambda \cdot \mathrm{id}(\mathbf{l}) \iff$
$(f - \lambda \cdot \mathrm{id})(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{l} \in Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \iff Ker(f - \lambda\, \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

<u>2. $\iff$ 3.</u>

$Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff \mathcal{N}ull(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff$
$\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}$ ir neinvertējama matrica $\iff \det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = 0$. ■

Īpašvērtību atrašanas algoritmi:

- *Gausa metodes algoritms:*
  (1) atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
  (2) noteikt ar kādām parametra λ vērtībām LVS

  $$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  ir netriviāli atrisinājumi $\mathbf{x}$, var izmantot $\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}$ pakāpienveida formu, visu šādu λ vērtību kopa ir $\mathcal{S}pec(f)$.
- *raksturīgā polinoma algoritms:*
  (1) atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
  (2) atrisināt *raksturīgo vienādojumu*

  $$R_{\mathbf{F}}(\lambda) = \det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

  visu sakņu λ vērtību kopa ir $\mathcal{S}pec(f)$.

Īpašvektoru atrašanas algoritms:

(1) atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
(2) atrast $\mathcal{S}pec(f)$,
(3) atrast $\forall\ \lambda_0 \in \mathcal{S}pec(f)$ atbilstošos īpašvektorus - atrisināt LVS $(\mathbf{F}-\lambda_0\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ attiecībā uz $\mathbf{x}$.

PIEMĒRS 16.7. $\mathbf{F}=\left[\begin{array}{c|c} 4 & 15 \\ \hline -2 & -7 \end{array}\right]$.

<u>Gausa metodes algoritms</u>

$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0} \iff \left[\begin{array}{c|c} 4-\lambda & 15 \\ \hline -2 & -7-\lambda \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \iff$

$\begin{cases} (4-\lambda)x_1+15x_2=0 \\ -2x_1+(-7-\lambda)x_2=0 \end{cases}$. Paplašinātās matricas pakāpienveida forma ir

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \frac{1}{2}(-7-\lambda) & 0 \\ \hline 0 & 15+\frac{1}{2}(4-\lambda)(-7-\lambda) & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & * & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2+3\lambda+2) & 0 \end{array}\right]$$

Seko, ka $\exists$ netriviāli LVS atrisinājumi $\iff \lambda^2+3\lambda+2=0 \iff \lambda\in\{-2,-1\}$.

<u>Raksturīgā polinoma algoritms</u>

$\det(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})=\det\left[\begin{array}{c|c} 4-\lambda & 15 \\ \hline -2 & -7-\lambda \end{array}\right]=(4-\lambda)(-7-\lambda)+30=$
$\lambda^2+3\lambda+2=0 \implies \lambda\in\{-2,-1\}$.

<u>Īpašvektori</u>

$\lambda=-1 \implies \left[\begin{array}{c|c} 5 & 15 \\ \hline -2 & -6 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{x}=\left[\begin{array}{c} -3c \\ \hline c \end{array}\right]$

$\lambda=-2 \implies \left[\begin{array}{c|c} 6 & 15 \\ \hline -2 & -5 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{x}=\left[\begin{array}{c} (-5/2)c \\ \hline c \end{array}\right]$

16.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 16.8. L, V - LT ar bāzēm $\mathcal{B}_L=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ un $\mathcal{B}_V=\{\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3\}$. Attiecībā uz šīm bāzēm LA f matrica ir $\mathbf{F}=\left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ \hline -2 & 1 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]$. Atrast tādas L un V bāzes $\mathcal{B}'_L$ un $\mathcal{B}'_V$ (izteikt to elementus izmantojot sākotnējās bāzes), attiecībā uz kurām f matrica ir normālajā formā.

VINGRINĀJUMS 16.9. Atrast matricu raksturīgos polinomus.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ \hline 7 & 9 \end{array}\right]$;
(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 5 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 16.10. Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 5 & -4 \\ \hline 9 & -7 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$;
(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & -3 & -1 \\ \hline -12 & 17 & 6 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$;

(3) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 5 & 6 & -5 \\ \hline 7 & 7 & 7 & -6 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$.

VINGRINĀJUMS 16.11. Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$, virs $\mathbb{R}$.

(2) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$, virs $\mathbb{C}$.

VINGRINĀJUMS 16.12. Atrast īpašvērtības un īpašvektorus LO polinomu telpās.

(1) $L = \mathbb{R}[X]_3$, $f(p) = p'$;
(2) $L = \mathbb{R}[X]_2$, $f(p) = (X \cdot p)'$.

VINGRINĀJUMS 16.13. Vispārināt īpašvektora un īpašvērtību jēdzienus, to atrašanas algoritmus uz divdimensionālu IA gadījumu.

VINGRINĀJUMS 16.14. Invertējamai $n \times n$ matricai $\mathbf{A}$ ir n īpašvērtības $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (iespējams, dažas ir vienādas). Atrast LO $f(\mathbf{M}) = \mathbf{AMA}^{-1}$ īpašvērtības.

17. NODAĻA

Īpašvērtību un īpašvektoru īpašības, Cayley-Hamilton theorēma

17.1. Īpašvektoru un raksturīgā polinoma īpašības

Teorēma 17.1. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. f matricu raksturīgie polinomi nav atkarīgi no bāzes (raksturīgais polinoms ir LO invariants).*

PIERĀDĪJUMS
Pārejot uz citu bāzi ar pārejas matricu $\mathbf{S}$ f matrica mainās saskaņā ar formulu
$\mathbf{F}' = \mathbf{SFS}^{-1} \implies R_{\mathbf{F}'}(\lambda) = \det(\mathbf{F}' - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{SFS}^{-1} - \lambda\mathbf{E}) =$

$$\det\Big(\mathbf{SFS}^{-1} - \mathbf{SS}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\Big) = \det\Big(\mathbf{SFS}^{-1} - \mathbf{S}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{S}^{-1}\Big) =$$

$$= \det\Big(\mathbf{S}(\mathbf{FS}^{-1} - \lambda\mathbf{ES}^{-1})\Big) = \det\Big(\mathbf{S}(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{S}^{-1}\Big) =$$

$$\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\det(\mathbf{S}^{-1}) = \underbrace{\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{S}^{-1})}_{=1}\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = R_{\mathbf{F}}(\lambda). \blacksquare$$

Teorēma 17.2. *$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad*
(1) $R_{\boldsymbol{A}}(\lambda) \in k[\lambda]$.
(2) $R_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{zemākas } \lambda \text{ pakāpes}}$.
(3) *$R_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ brīvais loceklis ir vienāds ar* $\det \boldsymbol{A}$.

PIERĀDĪJUMS
1. Matricas determinants ir polinomiāla funkcija no tās elementiem.

2. Izvirzīsim $\det \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} - \lambda & ... & a_{1n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline a_{n1} & ... & a_{nn} - \lambda \end{array}\right]$ pēc pirmās rindas interesējoties tikai par koeficientiem pie λ^n un λ^{n-1}. Šajā izvirzījumā tikai pirmais loceklis var saturēt tādus monomus. Turpina šo procesu ar mazākām matricām.

Beidzot šo procesu iegūst, ka koeficienti pie monomiem λ^n un λ^{n-1} ir tādi paši kā polinomam $(a_{11} - \lambda)...(a_{nn} - \lambda)$.

3. $\forall\ f(X) = a_nX^n + ... + a_1X + a_0 \in k[X]$ brīvais loceklis ir vienāds ar $f(0) \implies R_{\mathbf{A}}(\lambda)$ brīvais loceklis ir vienāds ar $R_{\mathbf{A}}(0) = \det \mathbf{A}$. $\blacksquare$

Dota matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ sauc par $\mathbf{A}$ *pēdu* tr $\mathbf{A}$.

Piezīme 17.3. No pirmās teorēmas seko, ka visi raksturīga polinoma koeficienti (piemēram, pēda un determinants) ir invarianti (nav atkarīgi no bāzes): tr $\mathbf{A}$ =tr $\mathbf{SAS}^{-1}$.

Teorēma 17.4. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$.*
(1) *$\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$: $L^\lambda \leq L$.*
(2) *$\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subseteq \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$, λ_i - dažādi, $\forall\ i:\ \boldsymbol{l}_i \in L^{\lambda_i}$. Tad $\underline{\{\boldsymbol{l}_1, ..., \boldsymbol{l}_m\}}$.*

(3) $\lambda, \mu \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A}), \lambda \neq \mu \implies L^\lambda + L^\mu = L^\lambda \oplus L^\mu$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{l}, \mathbf{l}' \in L^\lambda \implies \begin{cases} f(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}') = \lambda\mathbf{l} + \lambda\mathbf{l}' = \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{l}') \\ f(\mu\mathbf{l}) = \mu f(\mathbf{l}) = \mu\lambda\mathbf{l} = \lambda(\mu\mathbf{l}) \end{cases}$

2. Pierādījums no pretējā. Pieņemsim, ka n ir minimālā indeksa vērtība ar īpašību $\overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n\}}$ vai, citos terminos $\mathbf{l}_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{l}_i$.

$$\implies f(\mathbf{l}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(\mathbf{l}_i) \implies \lambda_n \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i \mathbf{l}_i.$$

$\lambda_n = 0 \implies \overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{n-1}\}}$ - pretruna ar pieņēmumu.

$$\lambda_n \neq 0 \implies \begin{cases} \mathbf{l}_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{l}_i \\ \mathbf{l}_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (\alpha_i\lambda_i/\lambda_n)\mathbf{l}_i \end{cases} \implies$$

$\mathbf{0} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)}_{\neq 0} \mathbf{l}_i \implies \exists$ netriviāla lineāra kombinācija, kas saista $\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{n-1}\} \implies \overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{n-1}\}}$.

3. $\mathbf{x} \in L^\lambda \cap L^\mu \implies \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ir vienlaicīgi īpašvektors ar divām īpašvērtībām - pretruna. ■

17.2. Cayley-Hamilton teorēma

17.2.1. Teorēma.

TEORĒMA 17.5. $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$. *Tad*

$$R_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{O}_n.$$

PIERĀDĪJUMS

■

17.2.2. Teorēmas pielietojumi.

17.2.2.1. *Matricu invertēšana.* Cayley-Hamilton teorēmu var pielietot matricu invertēšanā.

TEORĒMA 17.6. $\boldsymbol{M} \in GL(n, k)$, $R_{\boldsymbol{M}}(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + (-1)^n \det(\boldsymbol{M})$. *Tad*

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\det(\boldsymbol{M})}\Big(\boldsymbol{M}^{n-1} + a_{n-1}\boldsymbol{M}^{n-2} + ... + a_1\boldsymbol{E}_n\Big).$$

PIERĀDĪJUMS

■

PIEMĒRS 17.7.

$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]$, $R_{\mathbf{M}}(t) = t^2 - 5t - 2$. Redzam, ka

$$\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{M} - 5\mathbf{E}_2) = 2\mathbf{E}_2$$

Seko, ka $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{M} - 5\mathbf{E}_2) = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$.

17.2.2.2. *Augstu matricu pakāpju atrašana.*

TEORĒMA 17.8. *$\boldsymbol{M} \in GL(n,k)$, $R_{\boldsymbol{M}}(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + (-1)^n \det(\boldsymbol{M})$. Pieņemsim, ka atlikums, dalot t^n ar $R_{\boldsymbol{M}}(t)$ ir $r(t)$.*

Tad $\boldsymbol{M}^n = r(\boldsymbol{M})$.

PIERĀDĪJUMS $\mathbf{M}^n = d(\mathbf{M}) \cdot R_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) + r(\mathbf{M}) = r(\mathbf{M})$. ■

PIEMĒRS 17.9. $\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]$, $R_{\mathbf{M}}(t) = t^2 - 5t - 2$. Atradīsim $\mathbf{M}^{10}$.

Izdalīsim t^5 ar $t^2 - 5t - 2$:

$$t^5 = (t^3 + 5t^2 + 27^t + 145)(t^2 - 5t - 2) + (779t + 290).$$

Seko, ka $\mathbf{M}^5 = 779\mathbf{M} + 290\mathbf{E}_2$.

17.3. Klasiski rezultāti par īpašvērtību lokalizāciju

17.3.1. Geršgorina teorēma.

TEORĒMA 17.10. *($\mathbb{R}$ variants) $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$ definēsim $r_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Tad*

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})\ \exists\ i:\ \ \lambda \in [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i].$$

(katra reāla īpašvērtība atrodas kādā no intervāliem ar centru a_{ii} un garumu $2r_i$)

PIERĀDĪJUMS

$$\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \iff \exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix} :\ \mathbf{Ac} = \lambda\mathbf{c} \iff \begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_1 \\ ... \\ a_{n1}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

Izvēlēsimies tādu i, ka $|c_i| = \max_j |c_j| > 0$. Apskatīsim i-to vienādojumu:

$$\lambda c_i - a_{ii}c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}c_j \iff \lambda - a_{ii} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i} \implies$$

$$|\lambda - a_{ii}| = |\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij} \cdot \frac{c_j}{c_i}| =$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\ \underbrace{|\frac{c_j}{c_i}|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i \implies \lambda \in [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i].\blacksquare$$

PIEMĒRS 17.11. $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ reālās īpašvērtības atrodas intervālā $[0, 4]$.

Apzīmēsim ar $B(a, r)$ rinķi kompleksajā plaknē ar centru $a \in \mathbb{C}$ un rādiusu $r \in \mathbb{R}$.

Teorēma 17.12. *($\mathbb{C}$ variants) $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$, $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$ definēsim $r_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Tad*

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})\ \exists\ i:\ \lambda \in B(a_{ii}, r_i).$$

(katra kompleksa īpašvērtība atrodas kādā no Geršgorina riņķiem)

Pierādījums

$$\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \iff \exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix} :\ \mathbf{Ac} = \lambda\mathbf{c} \iff \begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_1 \\ ... \\ a_{n1}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

Izvēlēsimies tādu i, ka $|c_i| = \max_j |c_j|$. Apskatīsim i-to vienādojumu:

$\lambda c_i - a_{ii}c_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}c_j \iff \lambda - a_{ii} = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i} \implies$

$$\Big|\lambda - a_{ii}\Big| = \Big|\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i}\Big| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \cdot \left|\frac{c_j}{c_i}\right| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i$$

$\implies |\lambda - a_{ii}| \leq r_i \implies \lambda \in B(a_{ii}, r_i)$. ■

17.3.2. Perrona teorēma.

Teorēma 17.13. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i, j:\ a_{ij} > 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$:*

(1) *$\lambda > 0$;*

(2) *$\exists\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{A}^{\lambda}$: $\forall\ i\ c_i > 0$;*

(3) *$\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.*

Pierādījums Skatīt papildmateriālu.■

Piemērs 17.14. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$, $\mathcal{S}pec(\mathbf{A}) = \{-1.6824, 0.2859, 10.3965\}$.

17.4. Lineāru operatoru matricu vienkāršošana

17.4.1. Diagonalizācija.

Matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, k)$ sauc par *diagonalizējamu*, ja $\exists$ invertējama matrica $\mathbf{S} \in \mathcal{M}at(n, k)$ tāda, ka $\mathbf{SAS}^{-1}$ ir diagonāla matrica. Šādā gadījumā saka, ka $\mathbf{S}$ *diagonalizē* $\mathbf{A}$.

Pāreju $\mathbf{A} \dashrightarrow \mathbf{SAS}^{-1}$ var uzskatīt par bāzes maiņas efektu uz $\mathbf{A}$. Tādējādi matrica ir diagonalizējama, ja $\exists$ bāze, attiecībā uz kuru tā ir diagonāla:

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} \\ f \text{ matrica } \mathbf{F} \end{cases} \dashrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\} \\ f \text{ matrica } \mathbf{SFS}^{-1} \end{cases}$$

Matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{SAS}^{-1}$ sauc par *līdzīgām matricām*.

Piemērs 17.15. $\left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a & -a \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

TEORĒMA 17.16.
(1) $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ *ir diagonalizējama* $\iff \exists\, n$ *lineāri neatkarīgi* $\boldsymbol{A}$ *īpašvektori.*
(2) $\exists\, \boldsymbol{S}: \ \boldsymbol{SAS}^{-1} = \boldsymbol{D}$ *- diagonāla* $\implies \boldsymbol{S}^{-1}$ *kolonnas ir* $\boldsymbol{A}$ *īpašvektoru koordinātu kolonnas.*

PIERĀDĪJUMS
1. $\underline{\implies}$
$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir diagonalizējama $\implies \exists$ bāze $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, attiecībā uz kuru LA matrica $\mathbf{A}' = \mathbf{SAS}^{-1}$ ir diagonāla:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & 0...0 & 0 \\ \hline ... & ... & 0 \\ \hline 0 & 0...0 & \lambda_n \end{array}\right] \implies \mathbf{A}'\mathbf{e}'_i = \lambda_i \mathbf{e}'_i \implies \mathcal{B}' \text{ elementi ir } n \text{ lineāri neatkarīgi } \mathbf{A}'$$

īpašvektori.

$\underline{\Longleftarrow}$
$\exists\, n$ lineāri neatkarīgi $\mathbf{A}$ īpašvektori $\{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ ar īpašvērtībam $\lambda_i \implies \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ ir bāze un attiecībā uz to jaunā matrica $\mathbf{A}'$ ir diagonāla.

2. $\mathbf{SAS}^{-1} = \mathbf{D} \implies \mathbf{AS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^{-1} = [\mathbf{c}_1|...|\mathbf{c}_n] \\ \mathbf{D} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{E}_{ii} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{AS}^{-1} = [\mathbf{Ac}_1|...|\mathbf{Ac}_n] \\ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D} = [\lambda_1\mathbf{c}_1|...|\lambda_n\mathbf{c}_n] \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

TEORĒMA 17.17. *$n \times n$ matrica ir diagonalizējama, ja*
(1) *tai $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības,*
(2) *tā ir trijstūrveida formā ar dažādiem elementiem uz galvenās diagonāles.*

PIERĀDĪJUMS
1. Matricai $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības $\implies$ tai ir n lineāri neatkarīgi īpašvektori.

2. Matrica $\mathbf{A}$ ir trijstūrveida formā ar dažādiem elementiem $a_{11}, ..., a_{nn}$ uz diagonāles $\implies \forall\, i$ matricai $\mathbf{A} - a_{ii}\mathbf{E}$ uz diagonāles ir vismaz viena nulle $\implies \det(\mathbf{A} - a_{ii}\mathbf{E}) = 0 \implies a_{ii} \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \implies$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības. $\blacksquare$

17.4.2. Triangulācija.

Matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ sauc par *triangulējamu*, ja $\exists$ invertējama matrica $\mathbf{S} \in \mathcal{M}at(n,k)$ tāda, ka $\mathbf{SAS}^{-1}$ ir augšēji trijstūrveida matrica. Šādā gadījumā saka, ka $\mathbf{S}$ *triangulē* $\mathbf{A}$.

Izmantojot bāzes maiņas interpretāciju, var teikt, ka matrica ir triangulējama, ja $\exists$ bāze, attiecībā uz kuru tā ir augšēji trijstūrveida.

TEORĒMA 17.18. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ *ir triangulējama* $\iff$
$\exists$ *bāze* $\{\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_n\}$*:*

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}: \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_i \in \langle \boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_i \rangle.$$

PIERĀDĪJUMS
$\underline{\implies}$
$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir triangulējama $\implies \exists$ bāze $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, attiecībā uz kuru LA matrica $\mathbf{T} = \mathbf{SAS}^{-1}$ ir augšēji trijstūrveida:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12}...t_{1,n-1} & t_{1n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0...0 & t_{nn} \end{array}\right] \implies \mathbf{AS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}.$$

$\mathbf{S}^{-1} = [\mathbf{c}_1|...|\mathbf{c}_n] \implies \mathbf{AS}^{-1} = [\mathbf{Ac}_1|...|\mathbf{Ac}_n]$.

$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T} = [t_{11}\mathbf{c}_1 | t_{12}\mathbf{c}_1 + t_{22}\mathbf{c}_2 | ... | \sum_{i=1}^{n} t_{in}\mathbf{c}_i]$.

Salīdzinot kolonnas iegūstam, ka $\mathbf{A}\mathbf{c}_i \in \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_i \rangle$.

$\Longleftarrow$

$\exists$ bāze $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n\}$: $\mathbf{A}\mathbf{g}_i \in \{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_i\}$ $\Longrightarrow$ pārejot uz jauno bāzi $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n\}$ matrica $\mathbf{SAS}^{-1}$ būs augšēji trijstūrveida formā.

17.5. Geršgorina teorēmas pastiprinājumi

17.5.1. Acīmredzamie pastiprinājumi.
$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$. Apzīmēsim $\mathbf{A}$ Geršgorina riņķu apvienojumu ar $\mathcal{G}(\mathbf{A})$.

Teorēma 17.19. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$. Tad*
(1) $\mathcal{S}pec(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathcal{G}(\boldsymbol{A}) \cap \mathcal{G}(\boldsymbol{A}^T)$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\mathcal{S}pec(\mathbf{A}) = \mathcal{S}pec(\mathbf{A}^T)$.
$$\begin{cases} \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbf{A}) \\ \mathcal{S}pec(\mathbf{A}^T) \subseteq \mathcal{G}(\mathbf{A}^T) \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) = \mathcal{S}pec(\mathbf{A}^T) \subseteq \mathcal{G}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{G}(\mathbf{A}^T). \blacksquare$$

17.5.2. Geršgorina riņķu apvienojuma sakarīgie apgabali.
$S \subseteq \mathbb{C}$ sauc par *sakarīgu,* ja jebkurus divus tās punktus var savienot ar nepārtrauktu galīga garuma līniju.

Jebkura $\mathbb{C}$ apakškopa sastāv no vienas vai vairākām sakarīgām un atdalītām apakškopām - *sakarīgajām komponentēm.*

Piemērs 17.20. Riņķis ir sakarīga kopa. Divas paralēlas taisnes nav sakarīga kopa - sastāv no 2 komponentēm.

Apzīmēsim matricas $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$ Geršgorina riņķu apvienojumu ar $\mathcal{G}(\mathbf{A})$.

Teorēma 17.21. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$. Ja $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ sakarīgā komponente $\mathcal{C}$ ir m Geršgorina riņķu apvienojums, tad $\mathcal{C}$ satur tieši m īpašvērtības (skaitot kopā ar kārtu).*

PIERĀDĪJUMS $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Definēsim $\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\mathbf{E}_{ii}$, $\mathcal{S}pec(\mathbf{D}) = \{a_{11}, ..., a_{nn}\}$. Definēsim matricu saimi $\mathbf{M}(t) = \mathbf{D} + t \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{D})$, $t \in [0, 1]$. Redzam, ka $\begin{cases} \mathbf{M}(0) = \mathbf{D} \\ \mathbf{M}(1) = \mathbf{A}. \end{cases}$ $\blacksquare$

17.5.3. Brauera teorēma.
17.5.3.1. *Kassini ovāli un apgabali.*
$a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. Kopu
$$KO(a_1, a_2, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - a_1||z - a_2| = r_1 r_2\}$$
sauc par *Kassini ovālu.*

Kopu
$$KA(a_1, a_2, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - a_1||z - a_2| \leq r_1 r_2\}$$
sauksim par *Kassini apgabalu* ar fokusiem a_1, a_2 un rādiusiem r_1, r_2.

Piezīme 17.22. Speciālgadījumos iegūsim riņķus, Bernulli leminiskatu apgabalus, punktus. Kassini apgabali var būt sakarīgi vai sastāvēt no 2 komponentēm.

17.5.3.2. *Teorēma.*

TEORĒMA 17.23. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$. $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$ *definēsim* $r_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. *Tad*

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})\ \exists\ i, j:\ \lambda \in KA(a_{ii}, a_{jj}, r_i, r_j).$$

(katra kompleksa īpašvērtība atrodas kādā no Kassini apgabaliem $KA(a_{ii}, a_{jj}, r_i, r_j)$)

PIERĀDĪJUMS

$\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \iff \exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix} :\ \mathbf{Ac} = \lambda\mathbf{c} \iff$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_1 \\ ... \\ a_{n1}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

Izvēlēsimies tādus i, j, ka

$$|c_i| = \max_{l\in\{1,...,n\}} |c_l| > 0,$$

$$|c_j| = \max_{l\in\{1,...,l\}\setminus\ \{i\}} |c_l|$$

$c_j = 0 \implies a_{ii} = \lambda \implies \lambda \in KA(a_{ii}, ...)$.

Pieņemsim, ka $|c_j| > 0$.

Apskatīsim i-to vienādojumu:

$\lambda c_i - a_{ii}c_i = \sum\limits_{l=1, l\neq i}^{n} a_{il}c_l \implies$

$|c_i||\lambda - a_{ii}| = |\sum\limits_{l=1, l\neq i}^{n} a_{il}c_l| \leq \sum\limits_{l=1, j\neq i}^{n} |a_{il}||c_l| \implies$

$|c_i||\lambda - a_{ii}| \leq \sum\limits_{l=1, l\neq i}^{n} |a_{il}||c_j| = |c_j|r_i \implies$

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \frac{|c_j|r_i}{|c_i|}.$$

Apskatīsim j-to vienādojumu:

$\lambda c_j - a_{jj}c_j = \sum\limits_{l=1, l\neq j}^{n} a_{jl}c_l \implies$

$|c_j||\lambda - a_{jj}| = |\sum\limits_{l=1, l\neq j}^{n} a_{jl}c_l| \leq \sum\limits_{l=1, j\neq j}^{n} |a_{jl}||c_l| \implies$

$|c_j||\lambda - a_{jj}| \leq \sum\limits_{l=1, l\neq j}^{n} |a_{jl}||c_i| = |c_i|r_j \implies$

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \frac{|c_i|r_j}{|c_j|}.$$

Sareizinot abas iegūtās vienādības, iegūsim

$$|\lambda - a_{ii}||\lambda - a_{jj}| \leq r_i r_j.\blacksquare$$

PIEZĪME 17.24. Līdzīgi Geršgorina riņķu gadījumam, var apskatīt $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}^T$ Kassini ovālu apvienojumu sķēlumu.

17.6. Perrona teorēma

17.6.1. Reālu vektoru un matricu salīdzināšana.

$L = \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$.

$\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in L$. Saka, ka $\mathbf{M} \geq \mathbf{M}'$, ja $m_{ij} \geq m'_{ij}$, $\forall\ i, j$. Var definēt arī stingru salīdzināšanu $<$. Speciālgadījumos iegūsim salīdzināšanu rindām un kolonnām.

Piemērs 17.25. $(3, 4, 5) < (4, 4.5, 7)$.

Tā var salīdzināt lineāru telpu elementi var laukos, kuros ir sākotnēji dabiski definēts pilns sakārtojums.

17.6.2. Teorēma.

Kolonnas $\mathbf{c}$ i-to koordināti apzīmēsim ar c_i.

Ar $|\mathbf{M}|$ apzīmēsim matricu, kuras elementi ir $|m_{ij}|$, speciālgadījumi - rindas vai kolonnas.

Teorēma 17.26. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i, j:\ a_{ij} > 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$:*
(1) *$\lambda > 0$;*
(2) *$\exists\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline \dots \\ \hline c_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{A}^{\lambda}$: $\forall\ i\ c_i > 0$;*
(3) *$\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.*

PIERĀDĪJUMS Pētīsim $\mathbf{A}$ darbību uz vektoriem-kolonnām ar pozitīvām koordinātēm. Apzīmēsim tādu kolonnu kopu ar $\mathcal{P}$.

$\forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{P}$ definēsim

$$\rho(\mathbf{x}) = \min_i \frac{(\mathbf{Ax})_i}{x_i}.$$

Seko, ka $\mathbf{Ax} \geq \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Citiem vārdiem sakot, $\rho(\mathbf{x})$ ir maksimālais reālais atrisinājums nevienādībai $\mathbf{Ax} \geq \lambda\mathbf{x}$ attiecībā uz λ.

Definēsim

$$\lambda_0 = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}).$$

Citiem vārdiem sakot, λ_0 ir maksimālais reālais skaitlis, kuram ir atrisināma nevienādība $\mathbf{Ax} \geq \lambda\mathbf{x}$ attiecībā uz λ un $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$.

Formāli runājot, būtu jāpierāda, ka λ_0 kā maksimums tiek sasniegts uz konkrēta vektora. To var pierādīt, apskatot tikai vektorus $\mathbf{x}$, kuriem $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Pieņemsim, ka λ_0 tiek sasniegts uz vektora $\mathbf{y}$.

$\mathbf{Ay} \geq \lambda_0\mathbf{y}$.
$\mathbf{Ay} \neq \lambda_0\mathbf{y} \implies \mathbf{Ay} > \lambda_0\mathbf{y} \implies$
$\exists\ \lambda_1 > \lambda_0:\ \mathbf{Ay} \geq \lambda_1\mathbf{y}$ un vismaz vienai koordinātei vienādība tiek sasniegta $\implies$ pretruna, jo pēc pieņēmuma λ ir maksimālais skaitlis ar šādu īpašību.

Ir pierādīts, ka $\lambda_0 \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ ar īpašvektoru $\mathbf{y}$.

1. Acīmredzami $\lambda_0 > 0$, jo $\mathbf{A}$ un $\mathbf{y}$ satur tikai pozitīvus elementus.

2. $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$.

3. Pieņemsim, ka $\exists\ \lambda_1 \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$: $|\lambda_1| > \lambda_0$, (var būt $\lambda_1 \in \mathbb{C}$) ar īpašvektoru $\mathbf{w}$ - tas var būt ar negatīvām vai 0 koordinātēm.

$\Longrightarrow$ $\mathbf{A}|\mathbf{w}| = |\mathbf{A}||\mathbf{w}| \geq |\mathbf{A}\mathbf{w}| = |\mathbf{A}\mathbf{w}| = |\lambda_1\mathbf{w}| = |\lambda_2||\mathbf{w}|$ $\Longrightarrow$

Ir atrasta jauna reāla īpašvērtība $|\lambda_1| > \lambda_0$ ar nenegatīvu īpašvektoru $\mathbf{w}$ - pretruna, jo λ_0 ir maksimālais reālais skaitlis, kas atrisina nevienādību $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. ■

PIEZĪME 17.27. Iepriekšējās teorēmas terminos λ_0 sauksim par $\mathbf{A}$ *Perrona īpašvērtību* un normētu $\mathbf{y} : \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ par *Perrona īpašvektoru.*

17.6.3. Pastiprinājumi.

TEORĒMA 17.28. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,\mathbb{R})$, $\forall\ i,j :\ a_{ij} > 0$, λ_0 - $\boldsymbol{A}$ Perrona īpašvērtība. Tad*

(1) $\dim \boldsymbol{A}^{\lambda_0} = 1$.

(2) $\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(A)\backslash\{\lambda_0\}$: $|\lambda| < \lambda_0$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. ■

Kvadrātveida matricu $\mathbf{A}$ sauc par *nereducējamu*, ja to nevar triangulēt ar otrā veida pārveidojumu matricām. Citiem vārdiem sakot, nekāda apakštelpa, kuru ģenerē sākotnējās bāzes apakškopa, nav invarianta apakštelpa.

TEORĒMA 17.29. *(Perrona-Frobeniusa theorēma) $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,\mathbb{R})$, $\boldsymbol{A}$ ir nereducējama matrica, $\forall\ i,j :\ a_{ij} \geq 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$:*

(1) $\lambda > 0$;

(2) $\exists\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{A}^{\lambda}$: $\forall\ i\ c_i > 0$;

(3) $\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. ■

17.7. Īpašvērtību un īpašvektoru lietojumi

17.7.1. Diskrētas sistēmas matemātiskajā medicīnā.

Apskatīsim vienkāršu vēža audzēja modeli. Vēža audzēja lielumu laika momentā n nosaka tā šūnu skaits u_n. Pieņemsim, ka vēža audzēja dinamiku nosaka kāda ķīmiska viela P, ko izdala pats audzējs, P daudzums laika momentā n ir v_n.

Pieņemsim, ka vēža audzēja šūnu skaits un P daudzums apmierina *diskrētu dinamisku sistēmu*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n. \end{cases}$$

Pamatojums:

- uzskatām, ka ja nav vielas P klātbūtnes, tad audzējs laika vienībā palieinās 2 reizes;
- P iznīcina audzēja šūnas, tāpēc -1 pirmajā vienādojumā, tas tiek iegūts mainot P nosacītās vienības;
- audzējs izdala P, pieņemsim, ka vidēji viena audzēja svara vienība izdala $3/4$ vienības P.

Apzīmēsim $\left[\dfrac{u_n}{v_n}\right]$ ar $\mathbf{x}_n$, iegūsim matricu vienādību

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,\ \text{kur}\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 3/4 & 0 \end{array}\right]$$

Ja ir zināma sākotnējā $\mathbf{x}$ vērtība $\mathbf{x}_0$, tad pēc m laika vienībām sistēmas stāvoklis būs

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{x}_0.$$

Pagaidām tiek izmantota kanoniskā bāze $\{\left[\begin{array}{c}1\\\hline 0\end{array}\right], \left[\begin{array}{c}0\\\hline 1\end{array}\right]\}$. Atradīsim labāku bāzi. $\mathbf{A}$ ir īpašvērtības $\{3/2, 1/2\}$ ar īpašvektoriem $\{\left[\begin{array}{c}2\\\hline 1\end{array}\right], \left[\begin{array}{c}2/3\\\hline 1\end{array}\right]\}$

Attiecībā uz jauno bāzi matrica ir $\mathbf{SAS}^{-1} = \mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c}3/2 & 0\\\hline 0 & 1/2\end{array}\right]$, kur $\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c}2 & 2/3\\\hline 1 & 1\end{array}\right] \Longrightarrow$

$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{DS} \Longrightarrow$

$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{DS})^m\mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{DS})(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{DS})...(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{DS})\mathbf{x}_0 =$

$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^m\mathbf{S}\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c|c}\frac{3}{2}^{m+1} - \frac{1}{2}^{m+1} & -\frac{3}{2}^m + \frac{1}{2}^m\\\hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^m & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^m\end{array}\right]\mathbf{x}_0 =$

$\left[\begin{array}{c|c}\frac{3}{2}^{m+1} - \frac{1}{2}^{m+1} & -\frac{3}{2}^m + \frac{1}{2}^m\\\hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^m & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^m\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}u_0\\\hline v_0\end{array}\right] \approx$

$\left[\begin{array}{c|c}\frac{3}{2}^{m+1} & -\frac{3}{2}^m\\\hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}u_0\\\hline v_0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\frac{3}{2}^{m+1}u_0 - \frac{3}{2}^m v_0\\\hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m u_0 - \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m v_0\end{array}\right] =$

$(\frac{3}{2})^m\left[\begin{array}{c}\frac{3}{2}u_0 - v_0\\\hline \frac{3}{4}u_0 - \frac{1}{2}v_0\end{array}\right].$

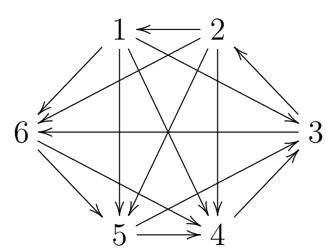
Tālāk ir jāveic analīze. Redzams, ka audzējs aug, ja sākuma nosacījumi ir bioloģiski relevanti. Pieņemsim, ka var panākt, lai vielas P izdalīšanās notiek intensīvāk. To var panākt ar terapeitiskām metodēm, piemēram, palielinot audzēja šūnu membrānu caurlaidību. Pieņemsim, ka šajā gadījumā iegūsim sistēmu ar matricu $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c}2 & -1\\\hline 2 & 0\end{array}\right]$. $\mathbf{A}$ ir īpašvērtības $\{1-i, 1+i\}$ ar īpašvektoriem $\{\left[\begin{array}{c}1/2+i/2\\\hline 1\end{array}\right], \left[\begin{array}{c}1/2-i/2\\\hline 1\end{array}\right]\}$. Var pierādīt, ka šajā gadījumā audzēja lielums pozitīvajā apgabalā svārstās, nevis aug.

17.7.2. Reitingu zinātne.

Dažādās sitācijās rodas nepieciešamība sakārtot pētāmās sistēmas vienības atkarībā no to īpašībām, piemēram:

- komandas sporta sacensībās,
- cilvēkus pēc to īpašībām,
- interneta lapas pēc to popularitātes.

PIEMĒRS 17.30. 6 komandas spēlē visas spēles savā starpā, neizšķirtu spēļu nav. Attēlosim turnīra rezultātus ar grafu, šķautne $a \to b$ nozīmē, ka a zaudēja b:



Atradīsim matricu $\mathbf{A}$, kuras grafs ir attēlots:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&1&1&0\\\hline 1&1&0&0&1&1\\\hline 1&1&0&0&0&1\\\hline 1&1&1&0&0&0\end{array}\right]$$

Kā salīdzināt savā starpā komandas $\{1,2\}$ un $\{3,5,6\}$? Tām ir vienāds vinnēto un zaudēto spēļu skaits.

Mēģināsim definēt komandu reitingu sarakstu $r_1, ..., r_6$ tā, lai būtu apmierināti šādi nosacījumi:

- komanda i ir stiprāka nekā komanda $j \iff r_i > r_j$;
- katra uzvara dod ieguldījumu reitingā, kas ir proporcionāls uzvarētās komandas reitingam (jo stiprāka komanda ir uzvarēta, jo lielāku ietekmi šī uzvara ir atstājusi uz vinnējušās komandas reitingu).

Attiecībā uz r_i iegūsim LVS:

$$\begin{cases} r_1 = c\sum_{j=1}^{6} a_{1j}r_j \\ ... \\ r_6 = c\sum_{j=1}^{6} a_{6j}r_j \end{cases}$$

To var pārveidot ekvivalentā matricu vienādojumā

$$\mathbf{r} = c\mathbf{A}\mathbf{r} \iff \mathbf{A}\mathbf{r} = \left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{r},\ \text{kur } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ ... \\ r_6 \end{bmatrix}.$$

Redzam, ka ir jāatrod $\mathbf{A}$ īpašvērtības un īpašvektori.

Šajā gadījumā

- $R_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda - 1$,
- ir tikai viena pozitīva īpašvērtība $\frac{1}{c} \approx 2.07$,
- atbilstošais īpašvektors - reitingu saraksts, normējot summu uz 100, ir $(5, 11, 23, 25, 17, 16)$.

Piemērs 17.31. Apskatīsim visu interneta HTML lapu kopu P. Definēsim šķautni $a \to b$, ja a atsaucas uz b (satur hiperlinku uz b). Kā sakārtot visas lapas atkarībā no to ietekmības? Līdzīgi kā iepriekšējā piemērā iegūsim matricas īpašvektoru atrašanas uzdevumu. Pamatojumā ir jāizmanto Perrona teorēmas tipa rezultāti.

Google meklēšanas programma izmanto šādus reitingus, lai šķirotu atrasto lapu sarakstu, pirmajā lappusē parādās lapas ar visaugstāko reitingu (PageRank algoritms).

Matricas ir milzīgas - $10^9 \times 10^9$, īpašvektori tiek meklēti ar tuvinātām, iteratīvām metodēm.

17.8. Vingrinājumi

Vingrinājums 17.32. Vai funkcija $\varphi : \mathcal{M}at(n,n,k) \longrightarrow k[\lambda]$:

$$\varphi(\mathbf{M}) = R_{\mathbf{M}}(\lambda),$$

ir lineārs attēlojums?

Vingrinājums 17.33. Vai matricas $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ \hline -2 & 9 & 1 \\ \hline 4 & -5 & -7 \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(3,\mathbb{R})$ īpašvērtība λ var apmierināt nosacījumu $4 \le \lambda \le 5$?

Vingrinājums 17.34. Diagonalizēt matricas:

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 7 & -5 \\ \hline 10 & -8 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 7 & -4 & 4 \\ \hline 5 & -1 & 5 \\ \hline -3 & 4 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$ (Norādījums: viena no raksturīgā polinoma saknēm ir -1).

VINGRINĀJUMS 17.35. Triangulēt matricas:

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 5 & -1 \\ \hline 4 & 1 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 3 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 1 & -2 \\ \hline -8 & 2 & -3 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$.

VINGRINĀJUMS 17.36. Atrisināt diskrēto dinamisko sistēmu

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}$$

ar sākuma nosacījumu $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1. \end{cases}$

VINGRINĀJUMS 17.37. Dots $f(\lambda) \in k[\lambda]$. Atrast matricu, kuras raksturīgais polinoms ir vienāds $f(\lambda)$.

VINGRINĀJUMS 17.38. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ - vienāda izmēra kvadrātveida matricas. Pierādīt, ka $R_{\mathbf{AB}}(\lambda) = R_{\mathbf{BA}}(\lambda)$.

VINGRINĀJUMS 17.39. $\mathbf{A}$ - $m \times n$-matrica, $\mathbf{B}$ - $n \times m$-matrica, $m \geq n$ Pierādīt, ka $R_{\mathbf{AB}}(\lambda) = (-\lambda)^{m-n} R_{\mathbf{BA}}(\lambda)$.

18. NODAĻA

k-algebras

18.1. Pamatfakti

18.1.1. Definīcijas.

k-lineāru telpu A sauc par *k-algebru,* ja kopā A ir definēta *reizināšana*

$$(\mathbf{l}, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{lu},$$

kas apmierina šādu nosacījumu: reizināšana ar fiksētu elementu no labās vai kreisās puses ir LA -

- $\mathbf{l}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{lu}+\mathbf{lv}$ (*kreisā distributivitāte*)
- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{l} = \mathbf{ul}+\mathbf{vl}$ (*labā distributivitāte*)
- $\lambda(\mathbf{lu}) = (\lambda\mathbf{l})\mathbf{u} = \mathbf{l}(\lambda\mathbf{u})$.

Var definēt papildnosacījumus:

- reizināšana ir asociatīva/komutatīva $\implies$ *asociatīva/komutatīva algebra,*
- $\exists$ neitrālais elements attiecībā uz reizināšanu (*vieninieks*) $\mathbf{e} \in A$:

$$\mathbf{le} = \mathbf{el} = \mathbf{l}, \forall\, \mathbf{l} \in A$$

  tad A - *unitāra algebra.*

Izmanto apzīmējumus līdzīgus skaitļu reizināšanai - *multiplikatīvo pierakstu.*

A - k-algebra, $S \leq A$. S sauc par *apakšalgebru,* ja S ir slēgta attiecībā uz reizināšanu:

$$\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S \implies \mathbf{ss}' \in S.$$

Piemērs 18.1. $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$.

18.1.2. Klasiskās k-algebras.

Algebra ar nulles reizināšanu

Definējot $\mathbf{lu} = \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{l}, \mathbf{u}$, iegūst asociatīvu un komutatīvu algebru, bez vieninieka.

Komplekso skaitļu algebra

$\mathbb{C}$ ir $\mathbb{R}$-lineāra telpa, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Reizināšana uzdod asociatīvas un komutatīvas $\mathbb{R}$-algebras struktūru, vieninieks - 1.

Polinomu algebra

$k[X]$ vai $k[X_1, ..., X_n]$ - k-lineāra telpa, $\dim k[X] = \infty$. Reizināšana uzdod asociatīvas un komutatīvas k-algebras struktūru, vieninieks - 1.

$\mathcal{M}at(n,k)$

$n \times n$ matricas ar saskaitīšanas un reizināšanas operācijām veido asociatīvu k-algebru, $\dim \mathcal{M}at(n,k) = n^2$. Nulle - $\mathbf{O}_{n,n}$, vieninieks - $\mathbf{E}_n$.

Fiksētas LT lineāro operatoru algebra

L - k-lineāra telpa. LA kompozīcija kopā $\mathcal{E}nd(L)$ uzdod asociatīvas k-algebras struktūru. $\dim(\mathcal{E}nd(L)) = (\dim L)^2$. Nulle - 0 attēlojums, vieninieks - id.

Fiksētas matricas ģenerēta algebra

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, k)$.

$p(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i X^i = p_m X^m + ... + p_0 \in k[X]$.

Definēsim $p(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{A}^i$, pieņemot, ka $A^0 = \mathbf{E}$.

Definēsim $k[\mathbf{A}] = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}at(n, k) | \exists\ p \in k[X] :\ \ \mathbf{B} = p(\mathbf{A})\}$ - visas matricas, kuras var izteikt kā $\mathbf{A}$ pozitīvu pakāpju un $\mathbf{E}$ lineāru kombināciju.

$k[\mathbf{A}] \leq \mathcal{M}at(n, k) \implies \dim(k[\mathbf{A}]) \leq n^2$.

18.2. Polinomu k-algebra

18.2.1. Definīcijas.

$k[X]$ - viena argumenta X polinomi, var domāt kā funkcijas $k \to k$ vai formālas summas:

$$f \in k[X] \iff f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0.$$

Simbola X vietā var lietot jebkuru citu simbolu.

- $a_i \in K$ sauc par polinoma *koeficientiem.*
- Polinomus formā aX^m sauc par *locekļiem (termiem).*
- Polinomus formā X^m sauc par *monomiem.*
- Polinoma koeficientu a_0 sauc par *brīvo locekli.*
- Polinoma f locekli aX^m, $a \neq 0$, ar lielāko pakāpi m sauc par *vecāko locekli*, apzīmē ar $\mathcal{H}(f)$, a sauc par *vecāko koeficientu,* m sauc par polinoma *pakāpi* $\deg(f)$.

Polinomu sauc par *normalizētu polinomu,* ja vecākais koeficients ir 1.

Piemērs 18.2. $f = -3X^2 + 10X - 4$, $\mathcal{H}(f) = -3X^2$, $\deg(f) = 2$.

Ja $\deg(f) = 0, (1, 2, 3)$, tad f ir *konstants (lineārs , kvadrātisks, kubisks)* polinoms.

Divi polinomi ir vienādi $\iff$ tiem ir vienādi koeficienti pie visām argumenta pakāpēm.

18.2.2. Īpašības.

Teorēma 18.3. *$f, g \in k[X]$. Tad:*

(1) $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$;
(2) $f \neq 0, g \neq 0 \implies \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

PIERĀDĪJUMS
1. Divu polinomu summas vecākā koeficienta indekss nevar būt lielāks kā lielākā no polinomu pakāpēm (var būt mazāks, ja koeficienti pie dažiem monomiem saīsinās).

2. $\begin{cases} f = f_n X^n + ... \\ g = g_m X^m + ... \end{cases} \implies fg = (f_n X^n + ...)(g_m X^m + ...) = (f_n g_m) X^{n+m} + ...$

k - lauks $\implies f_n g_m \neq 0 \implies \deg(fg) = n + m = \deg(f) + \deg(g)$.$\blacksquare$

18.2.3. Dalīšana ar atlikumu.

$f, g \in k[X]$, $\deg(f) \geq \deg(g)$. Definēsim operāciju polinomu kopā - f *redukciju ar* g*:*

$$(f, g) \mapsto \mathcal{R}_g(f) = f - \left(\frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)}\right) \cdot g.$$

PIEMĒRS 18.4. $\mathcal{R}_{X+1}(X^2+1) = (X^2+1) - X(X+1) = -X+1.$

TEORĒMA 18.5. $\deg\Big(\mathcal{R}_g(f)\Big) < \deg(f).$

PIERĀDĪJUMS

$$\begin{cases} \mathcal{H}(f) = a_n X^n \\ \mathcal{H}(g) = b_m X^m, n \geq m \end{cases} \implies \frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)} = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}.$$

$$\mathcal{H}\Big(\mathcal{R}_g(f)\Big) = \mathcal{H}\Big(f - \frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)} g\Big) = \mathcal{H}\Big(f - \frac{a_n X^n}{b_m X^m} g\Big) =$$
$$\mathcal{H}\Big(f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}(b_m X^m + ...)\Big) = \mathcal{H}(\underbrace{a_n X^n + ...}_{=f} - a_n X^n - ...).$$

Redzam, ka locekļi ar X^n saīsinās, tāpēc apgalvojums ir spēkā. ■

TEORĒMA 18.6. *(viena argumenta polinomu dalīšana ar atlikumu)* $f, g \in k[X]$. Tad eksistē tieši viens polinomu pāris $d, a \in k[X]$:

(1) $f = dg + r,$
(2) $\deg(r) < \deg(g).$

PIERĀDĪJUMS

d un r eksistence.

Veiksim pēctecīgi redukcijas $\mathcal{R}_g$ sākot ar f, tik ilgi, kamēr redukcija ir definēta. Iegūsim polinomu virkni

$$f \to \mathcal{R}_g(f) \to \mathcal{R}_g^2(f) \to ... \to \mathcal{R}_g^l(f), \text{ kur } \deg \mathcal{R}_g^l(f) < \deg g.$$

Ir spēkā polinomiālu vienādību sistēma

$$\begin{cases} \mathcal{R}_g(f) = f - d_1 g \\ \mathcal{R}_g^2(f) = \mathcal{R}_g(f) - d_2 g \\ ... \\ \mathcal{R}_g^l(f) = \mathcal{R}_g^{l-1}(f) - d_l g. \end{cases}$$

Saskaitot vienādību kreisās un labās puses, iegūsim

$$\sum_{i=1}^{l} \mathcal{R}_g^i(f) = f + \sum_{i=1}^{l-1} \mathcal{R}_g^i(f) + \sum_{i=1}^{l} d_i g \implies$$

$$\underbrace{\mathcal{R}_g^l(f)}_{=r} = f - g \underbrace{\sum_{i=1}^{l} d_i}_{=d} \implies$$

$$f = dg + r, \text{ kur } \deg r < \deg g.$$

d un r vienīgums.

Pieņemsim, ka eksistē divi polinomu pāri $(d, r), (d', r')$:

$$f = dg + r = d'g + r' \implies (d - d')g = r' - r.$$

Zinām, ka $\deg(r' - r) \leq \max(\deg r', \deg(-r)) < \deg(g)$.

$\deg\Big((d - d')g\Big) = \deg(d - d') + \deg(g) < \deg(g) \implies$

$d - d' = 0 \implies \begin{cases} d = d', \\ r = r'. \end{cases}$ ∎

Piemērs 18.7. $f = X^5 + X^2 + 1$, $g = X^2 + X + 1$ virs $\mathbb{Q}$.

$\mathcal{R}_g(f) = f - \dfrac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)} \cdot g = f - X^3 \cdot g = -X^4 - X^3 + X^2 + 1;$

$\mathcal{R}_g^2(f) = \mathcal{R}_g(f_1) = f_1 - (-X^2) \cdot g = 2X^2 + 1;$

$\mathcal{R}_g^3(f) = \mathcal{R}_g(f_2) = f_2 - 2 \cdot g = -2X - 1.$

$\mathcal{R}_g^4(f)$ nav definēts, jo $\deg\Big(\mathcal{R}_g^3(f)\Big) < \deg(g)$.

Rezultātā iegūsim

$$f = (X^3 - X^2 + 2)g + (-2X - 1).$$

Vēlams izmantot dalīšanu "ar stūrīti".

$f, g \in k[X]$. Saka, ka f *dalās ar* g $(g|f)$, ja $\exists\, d \in k[X] : f = dg$.

19. NODAĻA

Lineāro operatoru k-algebras

Pētīsim lineāro operatoru algebru koordinātu pierakstā:

- LO atbilst matricas ar matricu saskaitīšanu un reizināšanu;
- $\mathcal{E}nd(L) \simeq \mathcal{M}at(n,k)$, ja $\dim L = n$.

Visus šīs sadaļas rezultātus var pārformulēt arī LO terminos.

19.1. Pamatīpašības

TEORĒMA 19.1.

(1) *$\mathcal{M}at(n,k)$ ar matricu operācijām veido asociatīvu un unitāru k-algebru.*
(2) *$k[\boldsymbol{A}]$ ar matricu operācijām veido asociatīvu, komutatīvu un unitāru k-algebru.*

PIERĀDĪJUMS Jāpārbauda, ka izpildās visas aksiomas. Tas seko no matricu operāciju īpašībām.■

TEORĒMA 19.2. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$. Tad $\exists\ p \in k[X]:\ p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$.*

PIERĀDĪJUMS $\dim \mathcal{M}at(n,k) = n^2 \implies \exists\ m \in \mathbb{N}, m \leq n^2 : \overline{\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^m\}}$ - jo LT nevar būt vairāk kā $\dim L$ lineāri neatkarīgi elementi $\implies \exists\ c_i : c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{A}_1 + ... + c_m\mathbf{A}^m = \mathbf{O}$. Apzīmēsim $p(X) = c_0 + c_1X + ... + c_mX^m \in k[X]$, tad $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. ■

19.2. Lineāra operatora anulējošie polinomi

19.2.1. Definīcijas.

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,n,k)$, $p \in k[X]$. Ja $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, tad p sauc par **A**-*anulējošu polinomu*. Visu **A**-anulējošu polinomu kopu apzīmē ar $\mathcal{A}nn(\mathbf{A})$. Minimālas pakāpes **A**-annulējošu normalizētu polinomu sauc par **A** *minimālo anulējošo polinomu*, apzīmē ar $m_{\mathbf{A}}$.

PIEMĒRS 19.3. $m_{\mathbf{O}} = X$, $m_{\mathbf{E}} = X - 1$, $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, $m_{\mathbf{A}} = X^2 - 1$.

19.2.2. Anulējošo polinomu īpašības.

TEORĒMA 19.4. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$.*

(1) $f, g \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A}) \implies f + g \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A})$.
(2) $f \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A}) \implies \lambda f \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A})$.
(3) $\left\{\begin{array}{l} f \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A}) \\ p \in k[X] \end{array}\right. \implies f \cdot p \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\left\{\begin{array}{l} f(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \\ g(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \end{array}\right. \implies (f+g)(\mathbf{A}) = \mathbf{O} + \mathbf{O} = \mathbf{O} \implies f + g \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.

2. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \implies (\lambda f)(\mathbf{A}) = \lambda \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \implies \lambda f \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.

3. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \implies (f \cdot p)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) \cdot p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \cdot p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \implies f \cdot p \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$. ■

TEORĒMA 19.5. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$.
(1) $m_{\boldsymbol{A}}$ *ir noteikts viennozīmīgi.*
(2) $deg\ m_{\boldsymbol{A}} = \dim k[\boldsymbol{A}]$.
(3) $p \in \mathcal{A}nn(\boldsymbol{A}) \implies m_{\boldsymbol{A}}|p$.
(4) $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{SAS}^{-1} \implies m_{\boldsymbol{A}'} = m_{\boldsymbol{A}}$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pieņemsim, ka $\exists$ divi $\mathbf{A}$ minimālie anulējošie polinomi m un m' $\implies$ $m(\mathbf{A}) - m'(\mathbf{A}) = \mathbf{O} - \mathbf{O} = \mathbf{O} \implies \begin{cases} m - m' \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \\ \deg(m - m') < \deg m. \end{cases}$
Ja $m - m' \neq 0$ - pretruna.

2. $\deg m_{\mathbf{A}} = m \implies \mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + ... + a_0\mathbf{E} = \mathbf{O} \implies$
$\mathbf{A}^m \in \langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1} \rangle \implies$ atkārtoti izsakot augstākas $\mathbf{A}$ pakāpes kā $\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1}\}$ lineāras kombinācijas iegūsim, ka

$$\forall\ l \geq m : \mathbf{A}^l \in \langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1} \rangle \implies k[\mathbf{A}] = \langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1} \rangle.$$

$\overline{\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1}\}} \implies \exists$ netriviāla lineāra kombinācija, kas saista šos elementus:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{A}^i = \mathbf{O}$$

- pretruna, jo ir iegūts $\mathbf{A}$-anulējošs polinoms ar zemāku pakāpi nekā m.

3. Izdalīsim p ar $m_{\mathbf{A}}$:

$$p = d \cdot m_{\mathbf{A}} + a, \text{ kur } \deg a < \deg m_{\mathbf{A}}.$$

Ievietosim argumenta vietā $\mathbf{A}$:
$\underbrace{p(\mathbf{A})}_{=\mathbf{O}} = \underbrace{d(\mathbf{A})m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})}_{=\mathbf{O}} + a(\mathbf{A}) \implies a(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.
$a \neq 0 \implies$ pretruna, jo ir iegūts $\mathbf{A}$-anulējošs polinoms ar mazāku pakāpi nekā $\deg m_{\mathbf{A}}$.

4. Izmanto īpašību $(\mathbf{SAS}^{-1})^i = \mathbf{SA}^i\mathbf{S}^{-1}$, $\forall\ i$. ■

19.2.3. Hamiltona-Kēli teorēma.

Pagaidām ir zināms, ka $\deg(m_{\mathbf{A}}) \leq n^2$. Izrādās, ka $\forall\ \mathbf{A}\ R_{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \implies \deg(m_{\mathbf{A}}) \leq n$.

PIEMĒRS 19.6. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$. $a_{12} \neq 0$ vai $a_{21} \neq 0 \implies 3 \geq \deg m_{\mathbf{A}} \geq 2$.
Ideja: iegūt matricu vienādību formā

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = f(\lambda)\mathbf{E}$$

ar cerību izteikt $\mathbf{B}$ kā polinomiālu funkciju no $\mathbf{A}$ un λ.

Atcerēsimies matricu invertēšanas algoritmu ar papildinošās matricas palīdzību:

$$\mathbf{M}(ap\ \mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})\mathbf{E}$$

$\implies \exists\mathbf{B} :\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = \underbrace{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E}$.

$$\mathbf{B} = ap\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \left[\begin{array}{c|c} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ \hline -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{22} & -a_{12} \\ \hline -a_{21} & a_{11} \end{array}\right]}_{=\mathbf{A}'} - \lambda\mathbf{E}.$$

Abas vienādojuma puses pārveidosim kā polinomiālas funkcijas ar matricu koeficientiem:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})(\mathbf{A}'-\lambda\mathbf{E}) = \underbrace{(r_0 + r_1\lambda + \lambda^2)}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E} \implies$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' + \lambda(-\mathbf{A}-\mathbf{A}') + \lambda^2\mathbf{E} = r_0\mathbf{E} + \lambda(r_1\mathbf{E}) + \lambda^2\mathbf{E} \implies$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}' = r_0\mathbf{E} \\ -\mathbf{A}-\mathbf{A}' = r_1\mathbf{E} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}' = r_0\mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}'\mathbf{A} = r_1\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 \end{cases} \implies \underbrace{r_0\mathbf{E} + r_1\mathbf{A} + \mathbf{A}^2}_{=R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})} = \mathbf{O}.$$

Teorēma 19.7. *(Hamilton-Cayley)* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$. *Tad* $R_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = 0$.

PIERĀDĪJUMS

Atcerēsimies matricu invertēšanas algoritmu ar papildinošās matricas palīdzību:

$$\mathbf{M}(ap\ \mathbf{M}) = (\det\mathbf{M})\mathbf{E}.$$

$$\implies \exists\, \mathbf{B} = \mathbf{B}(\lambda,\mathbf{A}):\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = \underbrace{\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E}.$$

$\mathbf{B} = ap\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ elementi ir polinomi no λ, kuru pakāpe nepārsniedz $n-1$ (tas seko no algebriskā papildinājuma konstruēšanas algoritma) $\implies$ $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0$ $\implies$ $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{B}_i\lambda^i = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} r_j\lambda^j\right)}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E}$. Atverot iekavas un salīdzinot (matricu) koeficientu pie vienādām λ pakāpēm, iegūsim matricu sistēmu:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{B}_0 = r_0\mathbf{E} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0 = r_1\mathbf{E} \\ ... \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_{n-2} = r_{n-1}\mathbf{E} \\ -\mathbf{B}_{n-1} = r_n\mathbf{E}. \end{cases}$$

Reizinot i-to vienādojumu no kreisās malas ar $\mathbf{A}^{i-1}$ un saskaitot visu kopā iegūsim

$$\mathbf{O} = r_0\mathbf{E} + r_1\mathbf{A} + ... + r_{n-1}\mathbf{A}^n = R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\blacksquare.$$

19.3. Vingrinājumi

Vingrinājums 19.8. Noteikt, vai dotās k-LT ar doto reizināšanu $*$ ir k-algebras.

(1) $L = k^n$, $(x_1, ..., x_n) * (y_1, ..., y_n) = (x_1y_1, ..., x_ny_n)$;
(2) $L = \mathcal{M}at(n,k)$, $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$;
(3) $L = k[X]$, $f * g = f'g - fg'$.

Vingrinājums 19.9. Izdalīt polinomus f ar g (atrast dalījumu un atlikumu).

(1) $f = X^4 + X + 1$, $g = X + 1$, virs $\mathbb{Q}$;
(2) $f = X^3 - \sqrt{2}X^2 - 1$, $g = X^2 + X - \sqrt{2}$, virs $\mathbb{R}$;
(3) $f = X^3 + iX + (1-i)$, $g = iX + 1$, virs $\mathbb{C}$.

Vingrinājums 19.10. Atrast matricu minimālos anulējošos polinomus.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(3) $\left[\begin{array}{c|c|c} i & i & 0 \\ \hline 0 & i & i \\ \hline 0 & 0 & i \end{array}\right]$, virs $\mathbb{C}$

VINGRINĀJUMS 19.11. Atrast LO minimālos anulējošos polinomus.

(1) $L = \mathbb{R}^2$, f - projekcija uz x-asi;
(2) $L = k[X]_3$, $f(p) = p'$;
(3) $L = \mathcal{M}at(2, k)$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{ME}_{12}$.

VINGRINĀJUMS 19.12. Atrast matricu vai LO minimālos anulējošos polinomus.

(1) $\mathbf{D}$ - diagonāla $n \times n$ matrica;
(2) $\mathbf{T}$ - augšēji trijstūrveida $n \times n$ matrica;
(3) $L = \mathcal{M}at(n, k)$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{MA} + \mathbf{BM}$, kur $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ fiksētas matricas;
(4) $L = k[X]_n$, $f(p) = \int_0^x p(t)dt$.

20. NODAĻA

Matricu kanoniskās formas

20.1. Trijstūrveida forma

20.1.1. Nilpotenti operatori un matricas.

$f \in \mathcal{E}nd(L)$ sauc par *nilpotentu operatoru,* ja $\exists\ m \in \mathbb{N}$: $f^m = 0$. Attiecībā uz jebkuru L bāzi nilpotenta operatora f matrica $\mathbf{F}$ ir nilpotenta: $\mathbf{F}^m = \mathbf{O}$. Minimālo m vērtību, kurai $f^m = 0$, sauc par f nilpotences pakāpi.

PIEMĒRS 20.1. Nulles attēlojums, atvasināšanas attēlojums LT $k[X]_n$. Operators, kas atbilst matricai $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

TEORĒMA 20.2. *$\boldsymbol{N} \in \mathcal{M}at(n,k)$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*

(1) *$\boldsymbol{N}$ ir nilpotenta.*
(2) *$m_{\boldsymbol{N}}(\lambda) = \lambda^m$, $m \in \mathbb{N}$.*
(3) *$R_{\boldsymbol{N}}(\lambda) = \lambda^c$, $c \in \mathbb{N}$.*
(4) *$tr(\boldsymbol{N}^s) = 0$, $\forall\ s \in \mathbb{N}$.*

PIERĀDĪJUMS
■

TEORĒMA 20.3. *$\boldsymbol{N} \in \mathcal{M}at(n,k)$ - nilpotenta ar nilpotences pakāpi m.*

(1) *k - algebriski slēgts $\implies$ $\mathcal{S}pec(\boldsymbol{N}) = \{0\}$.*
(2) *$Ker(\boldsymbol{N}) < Ker(\boldsymbol{N}^2) < ... < Ker(\boldsymbol{N}^{m-1}) < \{\boldsymbol{L}\}$.*
(3) *$Im(\boldsymbol{N}) > Im(\boldsymbol{N}^2) > ... > Im(\boldsymbol{N}^{m-1}) > \{\boldsymbol{0}\}$.*
(4) *$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}$ - invertējama matrica, $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{N})^{-1} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\boldsymbol{N}^i$.*

PIERĀDĪJUMS
1.
2.
3.
4. Tieša pārbaude.
■

20.1.2. Nilpotenta operatora trijstūrveida forma.

TEORĒMA 20.4. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$ - nilpotents. Tad eksistē tāda L bāze, attiecībā uz kuru f matrica ir augšēji trijstūrveida ar nullēm uz galvenās diagonāles.*

PIERĀDĪJUMS
■

20.1.3. Patvaļīga operatora trijstūrveida forma.

20.2. Žordāna forma

20.2.1. Vispārinātie īpašvektori un vispārinātās īpaštelpas.

L - galīgi dimensionāla k-lineāra telpa, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. $\mathbf{l} \in L$ sauc par *vispārināto f-īpašvektoru ar īpašvērtību $\lambda \in k$ un svaru $m \in \mathbb{N}$*, ja

$$(f - \lambda\,\mathrm{id})^m(\mathbf{l}) = \mathbf{0}.$$

Visu vispārināto īpašvektoru kopu ar īpašvērtību λ un svaru m apzīmē ar $L_m(\lambda)$. Speciālgadījumā $m = 1$ iegūsim īpašvektora definīciju. Definēsim $L_0(\lambda) = \{\mathbf{0}\}$, $L(\lambda) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} L_m(\lambda)$. $L(\lambda)$ sauc par *vispārināto f-īpaštelpu.*

Apzīmēsim $(X - \lambda)^m \in k[X]$ ar $h(X)$, tad $(f - \lambda\,\mathrm{id})^m(\mathbf{l}) = h(f)(\mathbf{v})$.

Piemērs 20.5. f ir uzdots ar matricu

Teorēma 20.6. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.*

(1) $L_m(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\} \implies L_{m'}(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$, $\forall\, m'$: $1 \leq m' < m$.
(2) $\forall\, \lambda \in k$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$: $L_m(\lambda) \leq L$.
(3) $\forall\, \lambda \in k$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$: $L_0(\lambda) \leq L_1(\lambda) \leq ... \leq L$.
(4) $\exists\, M \in \mathbb{N}$: $L_m(\lambda) = L_M(\lambda) = L(\lambda)$, $\forall\, m \geq M$.
(5) $\forall\, \lambda \in k$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$: $L_m(\lambda)$ *- f-invarianta apakštelpa.*
(6) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies L_{m_1}(\lambda_1) \cap L_{m_2}(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}$, $\forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $f - \lambda\,\mathrm{id}$ ar g.
1. $L_m(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\} \implies \exists\, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$: $g^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. $g^m = g^{m'} \circ g^{m-m'}$, $\forall\, 1 \leq m' < m \implies$ $g^{m'}(g^{m-m'}(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$. $g^{m-m'}(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0} \implies L_{m'}(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$. $g^{m-m'}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies$ $\exists s$: $1 \leq s < m - m'$, $g^s(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ un $g^{s+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Tad $g^{m'}(g^s(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \implies L_{m'}(\lambda) \neq \{0\}$.

2.
$$\begin{cases} \mathbf{v} \in L(\lambda) \\ \mathbf{v}' \in L(\lambda) \end{cases} \implies \begin{cases} g^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \\ g^m(\mathbf{v}') = \mathbf{0} \end{cases} \implies \begin{cases} g^m(\lambda\mathbf{v}) = \lambda g^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ g^m(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \lambda g^m(\mathbf{v}) + \lambda g^m(\mathbf{v}') = \mathbf{0} \end{cases}$$

3. $g^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies g^{m'}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \forall\, m' > m \implies L_m(\lambda) \subseteq L_{m'}(\lambda)$.

4. No iepriekšējā apgalvojuma seko, ka $\dim L_1(\lambda) \leq \dim L_2(\lambda) \leq ... \leq \dim L(\lambda)$. $L_{m_1}(\lambda) < L_{m_2}(\lambda) \iff \dim L_{m_1}(\lambda) < \dim L_{m_2}(\lambda)$. Seko, ka $\exists\, M : \dim L_M(\lambda) = \dim L(\lambda)$.

5. $\forall\, \mathbf{l} \in L$: $(f \circ (f - \lambda\,\mathrm{id}))(\mathbf{l}) = f(f(\mathbf{l}) - \lambda\mathbf{l}) = f^2(\mathbf{l}) - \lambda f(\mathbf{l}) = (f - \lambda\,\mathrm{id})(f(\mathbf{l})) = ((f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ f)(\mathbf{l})$. Seko, ka $f \circ g = g \circ f$.

$\mathbf{v} \in L_m \implies g^m(f(\mathbf{v})) = f(g^m(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{v}) \in L_m(\lambda)$.

6. $\mathbf{v} \in L_{m_1}(\lambda_1) \cap L_{m_2}(\lambda_2) \implies (X - \lambda_1)^{m_1}$ un $(X - \lambda_2)^{m_2}$ dalās ar $\mathbf{v}$ minimālo anulējošo polinomu $\implies \mathbf{v} = \mathbf{0}$. ■

Teorēma 20.7. *L - LT*

(1) $\forall\, \lambda \in k$: $L(\lambda) \leq L$.
(2) $\forall\, \lambda \in k$: $L(\lambda)$ *- f-invarianta apakštelpa.*
(3) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies L(\lambda_1) \cap L(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}$.
(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} L(\lambda_i) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L(\lambda_i)$.

PIERĀDĪJUMS
Seko no iepriekšējās teorēmas. ■

20.2.2. Žordāna bloki.

Matricu

$$\mathbf{J}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \mathbf{E}_{i,i} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}_{j,j+1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \lambda & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ \hline ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(n,k)$$

sauc par *Žordāna bloku ar parametru (īpašvērtību)* λ. Speciālgadījumā $n = 1$ iegūsim, ka jebkura 1×1 matrica ir Žordāna bloks.

Žordāna matricas grafs ir orientēta ķēde ar vienādu svaru cilpām.

Piemērs 20.8. Žordāna bloku un to grafu piemēri:

$$\left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right], \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "2"] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above, "2"] \end{tikzcd},$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "-1"] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above, "-1"] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above, "-1"] \end{tikzcd}.$$

20.2.3. Žordāna bāze vienai vispārinātajai īpakštelpai.

Pieņemsim, ka $\exists\, \lambda \in k$: $L = L(\lambda)$.

Teorēma 20.9. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$, $L = L(\lambda)$. Tad eksistē L bāze $\mathcal{B}$, attiecībā uz kuru f matrica $\boldsymbol{F}$ ir formā*

$$\boldsymbol{J}_{m_1}(\lambda) \oplus \boldsymbol{J}_{m_2}(\lambda) \oplus ... \oplus \boldsymbol{J}_{m_t}(\lambda),$$

kur $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_t$ un virkne $(m_1, ..., m_t)$ ir noteikta viennozīmīgi.

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $f - \lambda\,\mathrm{id}$ ar g. g ir nilpotents operators: $\exists\, m > 0$: $g^m(\mathbf{l}) = \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{l} \in L \iff g^m = 0$. Apzīmēsim ar M g kārtu - $M = \min\{m \in \mathbb{N} | g^m = 0\}$. Seko, ka

(1) $\forall\, \mathbf{l} \in L$: $g^M(\mathbf{l}) = \mathbf{0}$;
(2) $\exists\, \mathbf{v} \in L$: $g^{M-1}(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, citos terminos - $L_{M-1}(\lambda) \subsetneq L_M(\lambda)$.

20.2.4. Žordāna bāze un kanoniskā forma vispārīgajā gadījumā.

Teorēma 20.10. *L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$, $L = \bigoplus_{i=1}^{s} L(\lambda_i)$. Tad eksistē L bāze $\mathcal{B}$, attiecībā uz kuru f matrica $\boldsymbol{F}$ ir formā*

$$\boldsymbol{J}(\lambda_1) \oplus \boldsymbol{J}(\lambda_2) \oplus ... \oplus \boldsymbol{J}(\lambda_s),$$

kur $\forall\, i$ $\boldsymbol{J}(\lambda_i) = \boldsymbol{J}_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \boldsymbol{J}_{m_{i2}}(\lambda_i) \oplus ... \oplus \boldsymbol{J}_{m_{it_i}}(\lambda_i)$, $m_{i1} \geq m_{i2} \geq ... \geq m_{it_i}$, ir viennozīmīgi noteikta Žordāna matricu tiešā summa.

PIERĀDĪJUMS $\forall\, i$ $L(\lambda_i)$ ir f-invarianta apakštelpa $\implies$ par L bāzi var ņemt $L(\lambda_1)$,...,$L(\lambda_s)$ bāzu apvienojumu. Tagad apgalvojums seko no iepriekšējās teorēmas. ■

20.3. Racionālā forma

20.4. Vingrinājumi

Vingrinājums 20.11.

Vingrinājums 20.12.

Vingrinājums 20.13.

Vingrinājums 20.14.

Vingrinājums 20.15.

21. NODAĻA

Bilineārās formas

21.1. Motivācija - standarta skalārais reizinājums

21.1.1. Reālais skalārais reizinājums.

$L = \mathbb{R}^n$. Uzskatīsim L elementus par kolonnu matricām. Definēsim *(standarta, kanonisko) skalāro reizinājumu:*

$$\rho : L \times L \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{w}.$$

Koordinātu terminos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \hline ... \\ \hline v_n \end{array} \right] \\ \mathbf{w} = \left[\begin{array}{c} w_1 \\ \hline ... \\ \hline w_n \end{array} \right] \end{array} \right. \implies \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_1 + ... + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Parasti apzīmēsim $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ar $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$.

$\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc par *ortogonāliem,* ja $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = 0$. Ortogonalitātes attiecību apzīmē ar $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

PIEMĒRS 21.1. $\mathbf{v} = [2, 3, 4]^T$, $\mathbf{w} = [2, -3, 0]^T$, $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = -5$.
$(1, 1, 1) \perp (1, 1, -2)$.

Par $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *Eiklīda normu* $|\mathbf{v}|$ sauc

$$\sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}.$$

Ja $n = 1$, tad norma sakrīt ar skaitļa absolūto vērtību:
$\mathbf{v} = (v_1) \implies |\mathbf{v}| = \sqrt{v^2} = |v|$.

Par *Eiklīda attālumu* $d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ starp $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc $|\mathbf{v} - \mathbf{w}|$.

PIEMĒRS 21.2. $|(2, 3, 4)^T| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$.

TEORĒMA 21.3.

(1) $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v})$.
(2) $(\boldsymbol{v}|\lambda\boldsymbol{w} + \mu\boldsymbol{z}) = \lambda(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) + \mu(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{z})$.

PIERĀDĪJUMS Būtu jābūt zināmam no analītiskās ģeometrijas kursa. ■

TEORĒMA 21.4.

(1) $|\boldsymbol{v}| = 0 \iff \boldsymbol{v} = 0$.
(2) $|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}| \leq |\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|$.

PIERĀDĪJUMS
1. $|\mathbf{v}| = 0 \iff \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2} = 0 \iff \forall\ i\ v_i = 0 \implies \mathbf{v} = 0.$

2. Trijstūra nevienādība. ■

21.1.2. Reālā skalārā reizinājuma lietojumi.

Ģeometrija

- vektora (nogriežņa) garuma aprēķināšana;
- vektoru (nogriežņu) ortogonalitātes noteikšana;
- vektoru (nogriežņu) paralelitātes noteikšana;
- leņķa atrašana starp vektoriem.

Lineāru vienādojumu sistēmas

LVS $\begin{cases} a_1x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ var interpretēt kā sistēmu

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1|\mathbf{x}) = b_1 \\ ... \\ (\mathbf{a}_m|\mathbf{x}) = b_m \end{cases}, \text{ kur } \begin{cases} \mathbf{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{in}) \\ \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

Matricu reizinājums

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{R}_m \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,l} = [\mathbf{K}_1|..., \mathbf{K}_l] \implies$

$$\mathbf{AB} = [(\mathbf{R}_i|\mathbf{K}_j)].$$

Statistika

Daudzparametru gadījuma lielumu korelācija.

21.2. Vispārīgas bilineāras formas

21.2.1. Multilineārie attēlojumi un formas.

$L_1, ..., L_m, V$ - k-lineāras telpas. Funkciju

$$f : L_1 \times ... \times L_m \longrightarrow V,$$

$$(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) \mapsto f(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m),$$

sauc par *multilineāru attēlojumu*, ja tas ir LA attiecībā uz katru argumentu, pārējos argumentus fiksējot. Ja $L_1 = ... = L_m$ un $V = k$, tad multilineāru attēlojumu sauc par *multilineāru formu*.Visu multilineāru attēlojumu kopu no $L_1, ..., L_m$ uz V apzīmēsim ar $\mathcal{H}om(L_1, ..., L_m, V)$.

Kopā $\mathcal{H}om(L_1, ..., L_m, V)$ var definēt saskaitīšanu un reizināšanu ar lauka elementu:

- $(f + g)(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) = f(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) + g(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m)$,
- $(\lambda f)(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) = \lambda f(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m)$.

Attiecībā uz šīm operācijām $\mathcal{H}om(L_1, ..., L_m, V)$ ir k-lineāra telpa.

Ja $m = 2$, tad polilineāru formu sauc par *bilineāru formu*. Visu L bilineāru formu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{B}il(L)$.

Citiem vārdiem sakot, bilineāra forma ir funkcija $f : L \times L \longrightarrow k$, kas $\forall\ \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\} \subset L$ apmierina šādas īpašības:

- $f(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \mu f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ (linearitāte pēc pirmā argumenta)
- $f(\mathbf{z}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \mu f(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ (linearitāte pēc otrā argumenta).

Bilineāru formu f sauc par:

- simetrisku, ja $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{w},\mathbf{v})$
- antisimetrisku, ja $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -f(\mathbf{w},\mathbf{v})$.

PIEMĒRS 21.5. Nulles bilineārā forma $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0, \ \forall \ \mathbf{v},\mathbf{w} \in L$. Skalārais reizinājums. $f(p,q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$.

LT virs $\mathbb{C}$ ir nepieciešams definēt attēlojumus, kas atšķiras no polineāriem attēlojumiem šādā veidā. L - $\mathbb{C}$-lineāra telpa. Attēlojumu $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sauc par $\mathbb{C}$-bilineāru (*pusotrlineāru*), ja

- $f(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{v},\mathbf{z}) + \mu f(\mathbf{w},\mathbf{z})$ (linearitāte pēc pirmā argumenta)
- $f(\mathbf{z}, \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}) = \overline{\lambda} f(\mathbf{z},\mathbf{v}) + \overline{\mu} f(\mathbf{z},\mathbf{w})$ (*kompleksi saistītā linearitāte* pēc otrā argumenta).

C-lineāru formu f sauc par

- *Ermita formu*, ja $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{f(\mathbf{w},\mathbf{v})}$,
- *anti-Ermita formu*, ja $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{f(\mathbf{w},\mathbf{v})}$.

21.2.2. Bilineāro formu pamatīpašības.

TEORĒMA 21.6. *Bilineārā forma ir viennozīmīgi definēta ar tās darbību uz jebkuras bāzes elementu pāriem.*

PIERĀDĪJUMS L - k-lineāra telpa, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. $f \in \mathcal{B}il(L)$.

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i\mathbf{e}_i \\ \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n w_j\mathbf{e}_j \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f\Big(\sum_{i=1}^n v_i\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n w_j\mathbf{e}_j\Big) = \sum_{i,j} v_i w_j f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j). \ \blacksquare$$

Galīgi dimensionālas L gadījumā matricu $\mathbf{F} = [f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)]_{n,n}$ sauc par *bilineārās formas f matricu (attiecībā uz doto bāzi).*

PIEZĪME 21.7. No teorēmas pierādījuma seko bilineārās formas vērtības aprēķināšanas formula, ja ir zināma matrica un elementu koordinātes:

$$f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{v}^T\mathbf{F}\mathbf{w},$$

kur $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ nozīmē gan elementus, gan to koordinātu kolonnas.

PIEMĒRS 21.8. Standarta skalārajam reizinājumam $\mathbf{F} = \mathbf{E}$.

21.2.3. Bilineāras formas matricas maiņa.

L - galīgi dimensionāla k-lineāra telpa, pieņemsim, ka ir izvēlētas divas bāzes - "sākotnējā" ("vecā")un "mainītā" ("jaunā"):

$$\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \mathcal{B}'_L = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}.$$

Apzīmēsim pārejas matricas ar $\mathbf{S}$ un $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c}, \\ \mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}' = \mathbf{A}\mathbf{c}', \end{cases}$$

kur $\mathbf{c}$ un $\mathbf{c}'$ ir elementa $\mathbf{l}$ koordinātu kolonna sākotnējā un mainītajā bāzē. Ar $\mathbf{A}$ palīdzību mainītā bāze tiek izteikta izmantojot sākotnējo bāzi.

Dota $f \in \mathcal{B}il(L)$, tās matrica attiecībā uz $\mathcal{B}_L$ ir $\mathbf{F}$. Atradīsim f matricu $\mathbf{F}'$ attiecībā uz bāzi $\mathcal{B}'_L$:

- $\mathbf{v} \sim \mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}'_L \Longrightarrow \mathbf{v} \sim \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}_L$,
- $\mathbf{c}^T = (\mathbf{A}\mathbf{c}')^T = \mathbf{c}'^T\mathbf{A}^T$,
- $\begin{cases} \mathbf{v} \sim \mathbf{c}' \\ \mathbf{w} \sim \mathbf{d}' \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{c}^T\mathbf{F}\mathbf{d} = \underbrace{\mathbf{c}'^T\mathbf{A}^T}_{=\mathbf{c}^T}\mathbf{F}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{d}'}_{=\mathbf{d}} = \mathbf{c}'^T\underbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A}}_{=\mathbf{F}'}\mathbf{d}'$

Seko, ka $\mathbf{F}' = \mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A}$.

Piemērs 21.9. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 7 & 2 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right]$.

Piezīme 21.10. Tā kā reizināšana ar invertējamu matricu saglabā rangu, tad seko, ka bilineāras formas matricas rangs nav atkarīgs no bāzes. To sauc par *bilineāras formas rangu.*

$n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}'$ sauc par *kongruentām,* ja $\exists\ \mathbf{S} \in GL(n,k)$: $\mathbf{A} = \mathbf{S}^T\mathbf{A}'\mathbf{S}$. Var redzēt, ka kongruence ir ekvivalences attiecība matricu kopā.

21.2.4. Bilineārās formas kvadrātiskā forma.

L - k-lineāra telpa, $char k \neq 2$. Funkciju $q : L \to k$ sauc par *kvadrātisku formu,* ja

(1) $q(\lambda\mathbf{l}) = \lambda^2 q(\mathbf{l})$,

(2) funkcija $f_q : L \times L \to k$, kas ir definēta ar vienādību $f(\mathbf{l},\mathbf{l}') = \dfrac{1}{2}(q(\mathbf{l}+\mathbf{l}') - q(\mathbf{l}) - q(\mathbf{l}'))$, ir simetriska bilineāra forma (q *polarizācija*)

Visu L kvadrātisko formu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{Q}(L)$.

Teorēma 21.11. *$q \in Q(L)$. Tad q ir viennozīmīgi noteikta kā funkcija no f_q.*

PIERĀDĪJUMS

$f_q(\mathbf{l},-\mathbf{l}) = -f_q(\mathbf{l},\mathbf{l}) = \dfrac{1}{2}(q(\mathbf{0}) - q(\mathbf{l}) - q(-\mathbf{l})) = \dfrac{1}{2}(q(\mathbf{0}) - 2q(\mathbf{l}))$

$\mathbf{l} = 0 \implies -f(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \dfrac{3}{2}q(\mathbf{0}) = 0 \implies q(\mathbf{0}) = 0.$

$\implies q(\mathbf{l}) = f_q(\mathbf{l},\mathbf{l})$. ■

$f \in \mathcal{B}il(L)$. Definēsim funkciju $q_f : L \to k$ ar vienādību $q_f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l},\mathbf{l})$.

Teorēma 21.12. *$f \in \mathcal{B}il(L)$. Definēsim $q_f : L \to k$ ar vienādību $q_f(\boldsymbol{l}) = f(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l})$.*

(1) q_f ir kvadrātiska forma,

(2) f - simetriska forma $\implies$ q_f polarizācija ir f.

PIERĀDĪJUMS

Par kvadrātiskās formas matricu sauc tās polarizācijas matricu attiecība uz doto bāzi $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$. Ja kvadrātiskās formas q matrica ir $\mathbf{F} = [f_{ij}]$, tad

- $f_{ij} = \frac{1}{2}(q(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - q(\mathbf{e}_i) - q(\mathbf{e}_j))$,
- $l = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{e}_i \implies q(\mathbf{l}) = f_q(\mathbf{l},\mathbf{l}) = \mathbf{l}^T\mathbf{F}\mathbf{l} = \sum_{i,j} f_{ij}c_ic_j$

21.2.5. Simetriskās bilineārās formas diagonālā forma.

Teorēma 21.13. *$f \in \mathcal{B}il(L)$, simetriska. Tad eksistē L bāze, attiecībā uz kuru f matrica ir diagonāla.*

PIERĀDĪJUMS Izmantosim indukciju ar argumentu $\dim L$.

Indukcijas bāze $\dim L = 1 \implies$ apgalvojums ir patiess, jo $\forall$ 1×1 matrica ir simetriska.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess $\forall$ LT, kurām dimensija ir mazāka nekā n un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess $\forall$ LT, kuru dimensija ir n.

Pieņemsim, ka f nav identiski vienāda ar nulles funkciju: $\exists\,\mathbf{l},\mathbf{l}'$: $f(\mathbf{l},\mathbf{l}') \neq 0 \implies \exists\,\mathbf{u} : q_f(\mathbf{u}) \neq 0$. Definēsim LF $\varphi \in L^*$: $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{u})$. $\dim Ker(\varphi) = n-1$. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu

$\exists\ Ker(\varphi)$ bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{n-1}\}$, attiecībā uz kuru f matrica ir diagonāla. Pierādīsim, ka $\mathcal{B} \cup \{u\}$ ir L bāze. Pieņemsim, ka $\exists$ lineāra kombinācija

$$\mu\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \text{ kur } \mu \neq 0.$$

Seko, ka $\varphi(\mu\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \implies \varphi(u) = 0$ - pretruna.

Redzam, ka attiecībā uz bāzi $\mathcal{B} \cup \{u\}$ f matrica ir diagonāla. ■

PIEZĪME 21.14. Tā ka kvadrātiskas formas polarizācija ir simetriska , tas seko, ka $\forall$ kvadrātiskai formai eksistē bāze, kurā tās matrica ir diagonāla.

PIEZĪME 21.15. Seko, ka simetriska matrica ir kongruenta diagonālai matricai.

TEORĒMA 21.16.

(1) *L - $\mathbb{C}$, $\dim L = n$, $f \in \mathcal{B}il(L)$, simetriska. Tad eksistē L bāze, attiecībā uz kuru f matrica ir $\boldsymbol{E}_r \oplus \boldsymbol{O}_{n-r}$.*
(2) *L - $\mathbb{R}$, $\dim L = n$, $f \in \mathcal{B}il(L)$, simetriska. Tad eksistē L bāze, attiecībā uz kuru f matrica ir $\boldsymbol{E}_p \oplus (-\boldsymbol{E}_q) \oplus \boldsymbol{O}_t$, kur p un q ir f*

PIERĀDĪJUMS

1. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu $\exists\ L$ bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, attiecībā uz kuru f matrica $\mathbf{F}$ ir diagonāla. Pieņemsim, ka $\mathbf{F} = \mathbf{D} \oplus \mathbf{O}_t$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica ar nenulles elementiem $\lambda_1, ..., \lambda_p$ uz galvenās diagonāles, $p + t = n$. Definēsim jaunu bāzi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, kur

- $\mathbf{e}'_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathbf{e}_i,\ \forall\ i \in [1, p]$,
- $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i,\ \forall\ i \in [p + 1, n]$.

Attiecībā uz $\mathcal{B}'$ f matrica ir vēlamajā formā.

2. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu $\exists\ L$ bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, attiecībā uz kuru f matrica $\mathbf{F}$ ir diagonāla. Pieņemsim, ka $\mathbf{F} = \mathbf{D}_+ \oplus \mathbf{D}_- \oplus \mathbf{O}_t$, kur $\mathbf{D}_+$ ir diagonāla matrica ar pozitīviem elementiem $\lambda_1, ..., \lambda_p$ uz galvenās diagonāles, $\mathbf{D}_-$ ir diagonāla matrica ar negatīviem elementiem $\lambda_{p+1}, ..., \lambda_{p+q}$ uz galvenās diagonāles, $p + q + t = n$. Definēsim jaunu bāzi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, kur

- $\mathbf{e}'_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathbf{e}_i,\ \forall\ i \in [1, p]$,
- $\mathbf{e}'_i = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_i}}\mathbf{e}_i,\ \forall\ i \in [p + 1, p + q]$,
- $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i,\ \forall\ i \in [p + q + 1, n]$.

Attiecībā uz $\mathcal{B}'$ f matrica ir vēlamajā formā. ■

PIEZĪME 21.17. Tā kā kvadrātiskas formas polarizācija ir simetriska forma, seko, ka katrai reālai kvadrātiskai formai q var atrast bāzi, attiecībā uz kuru tā ir šādā pierakstā (*normālajā pierakstā*):

$$q(\mathbf{l}) = l_1^2 + ... + l_p^2 - l_{p+1}^2 - ... - l_{p+q}^2, \text{ ja } \mathbf{l} \sim [l_1|...|l_n]^T.$$

TEORĒMA 21.18. *(Reālas kvadrātiskās formas inerces likums) Reālas kvadrātiskās formas normālā pieraksta pozitīvo un negatīvo locekļu skaits ir tās invariants (nav atkarīgs no bāzes).*

PIERĀDĪJUMS L - $\mathbb{R}$-lineāra telpa, q kvadrātiska forma telpā L. Pieņemsim, ka $\exists$ 2 L bāzes $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ un $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, attiecībā uz kurām f_q matricām ir dažāds skaits pozitīvo un negatīvo elementu normālajā pierakstā:

$$\begin{cases} \mathbf{l} = \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{l} = \sum_{i=1}^n l'_i \mathbf{e}'_i \end{cases} \implies \begin{cases} q(\mathbf{l}) = l_1^2 + ... + l_p^2 - l_{p+1}^2 - ... - l_{p+q}^2 \\ q(\mathbf{l}) = l_1'^2 + ... + l_{p'}'^2 - l_{p'+1}'^2 - ... - l_{p'+q'}'^2, \ p \neq p', \ q \neq q'. \end{cases}$$

$p + q = p' + q'$ ir vienāds ar f_q matricas rangu r. Pietiek pierādīt, ka $p = p'$. Pieņemsim pretējo, piemēram, $p > p'$.

Definēsim $P = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_p \rangle$, $N' = \langle \mathbf{e}'_{p'+1}, ..., \mathbf{e}'_n \rangle$. $\dim(P \cap N') = \dim(P) + \dim(N') - \dim(P + N') \geq p + (q' + n - r) - n = p - p' > 0 \implies \exists\, \mathbf{v} \in P \cap N'$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=p'+1}^{n} \mu_j \mathbf{e}'_j \neq \mathbf{0}.$$

Redzam, ka $q(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 > 0$ un $q(\mathbf{v}) = \sum_{j=p'+1}^{r} (-\mu_j^2) < 0$ - pretruna. ■

21.3. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 21.19.

22. NODAĻA

Lineārās telpas ar skalāro reizinājumu

22.1. Skalārais reizinājums

Skalārais reizinājums ir bilineāras vai $\mathbb{C}$-bilineāras formas speciālgadījums, kuru parasti definēti LT virs $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$. Definīcijas, īpašības un teorēmas, kas ir saistītas ar skalāro reizinājumu, bieži tiks formulētas divās versijās.

22.1.1. Pamatfakti.

H - $\mathbb{R}$-lineāra telpa. Telpā E ir dota *skalāra reizinājuma funkcija (simetriska nedeģenerēta bilineāra forma)*

$$H \times H \to \mathbb{R},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto < \mathbf{v}|\mathbf{w} >,$$

ja tā apmierina šādas īpašības:

- $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >$ ir bilineāra simetriska forma,
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > \geq 0$ (normas nenegativitāte);
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (normas nedeģenerētība).

Aprakstīsim skalārā reizinājuma darbību koordinātu formā. Ja $\mathbf{F} = [< \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j >]$ - skalārā reizinājuma matrica attiecībā uz izvēlētu bāzi un LT elementi tiek pierakstīti koordinātu kolonnu formā, tad $< \mathbf{v}|\mathbf{w} > = \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{w}$.

$\mathbb{R}$-LT H ar tajā uzdotu skalāro reizinājumu sauc par *Eiklīda telpu (ET).*

H - $\mathbb{C}$-lineāra telpa. Telpā H ir dota *skalāra reizinājuma funkcija (nedeģenerēta $\mathbb{C}$-bilineāra Ermita forma)*

$$E \times E \to \mathbb{C},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto < \mathbf{v}|\mathbf{w} >,$$

ja tā apmierina šādas īpašības:

- $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >$ ir $\mathbb{C}$-bilineāra Ermita forma,
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > \geq 0$ (normas nenegativitāte);
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (normas nedeģenerētība).

Koordinātu formā - ja $\mathbf{F} = [< \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j >]$ - skalārā reizinājuma matrica attiecībā uz izvēlētu bāzi, tad $< \mathbf{v}|\mathbf{w} > = \mathbf{v}^T \mathbf{F} \overline{\mathbf{w}}$.

$\mathbb{C}$-LT H ar tajā uzdotu skalāro reizinājumu sauc par *Ermita telpu (ET).*

Piemērs 22.1. Standarta skalārais reizinājums, matrica - $\mathbf{E}$. $H = \mathbb{R}^n$, $< \mathbf{v}|\mathbf{w} > = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i w_i$, kur $c_i > 0$. $H = \mathbb{R}[X]_n$, $< f|g > = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) g(x_i)$, kur $x_1, ..., x_{n+1}$ - dažādi reāli skaitļi. $E = \mathcal{C}[a, b]$ - nepārtrauktas funkcijas, $< f|g > = \int\limits_a^b f(t) g(t) dt$.

$H = \mathbb{C}^n$, $< \mathbf{v}|\mathbf{w} > = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i \overline{w_i}$.

ET elementus $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc par *ortogonāliem* ($\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$), ja $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0$.

PIEMĒRS 22.2. $H = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, $f = \sin x$, $g = \cos x$,
$< f|g >= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt = 0$.

Par $\mathbf{v} \in H$ *Eiklīda (vai Ermita) normu* $||\mathbf{v}||$ sauc $\sqrt{< \mathbf{v}|\mathbf{v} >}$.

PIEMĒRS 22.3. $H = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, $f = \sin x$,
$|f| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt} = \sqrt{\pi}$.

Attālumu starp $\forall$ $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$ definē kā $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$.

22.1.2. Normas īpašības.

TEORĒMA 22.4. *H - Eiklīda vai Ermita telpa.*
(1) $||\lambda \boldsymbol{v}|| = |\lambda| \cdot ||\boldsymbol{v}||$.
(2) $| < \boldsymbol{v}|\boldsymbol{w} > | \leq ||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{w}||$ *(Koši-Švarca nevienādība).*
(3) $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}|| \leq ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{w}||$*(trijstūra nevienādība).*

PIERĀDĪJUMS
1. $||\lambda \mathbf{v}||^2 =< \lambda \mathbf{v}|\lambda \mathbf{v} >= |\lambda|^2 < \mathbf{v}|\mathbf{v} >$.

2. $t \in \mathbb{R}$. Apskatīsim $||\mathbf{v} - t\mathbf{w}||^2$: $||\mathbf{v} - t\mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v} - t\mathbf{w}|\mathbf{v} - t\mathbf{w} >= < \mathbf{v}|\mathbf{v} > -2 < \mathbf{v}|\mathbf{w} > t - < \mathbf{w}|\mathbf{w} >= ||\mathbf{v}||^2 - 2 < \mathbf{v}|\mathbf{w} > t + ||\mathbf{w}||^2 t^2 \geq 0 \implies$ diskriminants - nepozitīvs $\implies$ $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >^2 - ||\mathbf{v}||^2 \cdot ||\mathbf{w}||^2 \leq 0 \implies | < \mathbf{v}|\mathbf{w} > | \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$.

3. $||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v} + \mathbf{w}|\mathbf{v} + \mathbf{w} >= < \mathbf{v}|\mathbf{v} > + \underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} > + < \mathbf{w}|\mathbf{v} >}_{=2<\mathbf{v}|\mathbf{w}>} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >=$

$=< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2 \underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}_{|<\mathbf{v}|\mathbf{w}>|} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} > \leq =< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2 \underbrace{| < \mathbf{v}|\mathbf{w} > |}_{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} > \leq$
$= ||\mathbf{v}||^2 + 2||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| + ||\mathbf{w}||^2 = (||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||)^2$. ■

L - lineāra telpa virs $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$. Funkciju $N : L \longrightarrow \mathbb{R}$ sauc par *normu*, ja izpildās šādi nosacījumi:

- $\forall$ $\mathbf{v} \in L :$ $N(\mathbf{v}) \geq 0$,
- $N(\mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v} = 0$,
- $N(\lambda \mathbf{v}) = |\lambda| N(\mathbf{v})$,
- $N(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \leq N(\mathbf{v}) + N(\mathbf{w})$.

PIEZĪME 22.5. Seko, ka Eiklīda un Ermita norma ir norma.

PIEZĪME 22.6. Seko, ka

$$-1 \leq \frac{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} \leq 1, \text{ ja } \mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}.$$

Definēsim $\cos \varphi = \dfrac{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$. φ var interpretēt kā "leņķi" starp $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$.

22.2. Ortonormētas bāzes

22.2.1. Pamatfakti.

H - ET.

- $S \subseteq H$ sauc par *ortogonālu kopu*, ja $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0, \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$;
- $S \subseteq H$ sauc par *normētu kopu*, ja $< \mathbf{v}|\mathbf{v} >= 1, \forall\ \mathbf{v} \in H$;
- $S \subseteq H$ sauc par *ortonormētu kopu*, ja

$$< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= \begin{cases} 1, & \text{ja } \mathbf{v} = \mathbf{w} \\ 0, & \text{ja } \mathbf{v} \neq \mathbf{w} \end{cases}, \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H.$$

TEORĒMA 22.7. *H - ET, $S \subseteq H$: S - ortogonāla nenulles elementu kopa. Tad $\underline{S}$.*

PIERĀDĪJUMS $S = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_m\}$.

Pieņemsim pretējo: $\overline{S} \implies \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_m$:

- $\exists\ \lambda_j \neq 0$;
- $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$.

Apskatīsim $< \cdot|\mathbf{s}_j >$:

$$< \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{s}_i\Big)|\mathbf{s}_j >= \underbrace{< \mathbf{0}|\mathbf{s}_j >}_{=0} \implies$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i < \mathbf{s}_i|\mathbf{s}_j >= 0 \implies \lambda_j < \mathbf{s}_j|\mathbf{s}_j >= 0 \implies$$

$\lambda_j ||\mathbf{s}_j||^2 = 0 \implies \lambda_j = 0$ vai $||\mathbf{s}_j|| = 0$ - pretruna jebkurā gadījumā. ■

E bāzi sauc par *ortonormētu bāzi*, ja tā ir ortonormēta kopa.

PIEMĒRS 22.8. $\mathbb{R}^n$ kanoniskā bāze - ortonormēta attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.

22.2.2. Ortonormalizācija.

H - ET. $\forall\ S \in H$ var pārveidot par normētu kopu:

$$\forall\ \mathbf{v} \in E \text{ definēsim } \mathbf{v}^\star = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v} \implies ||\mathbf{v}^\star|| = \frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||} = 1.$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l\} \implies S^\star = \{\mathbf{v}_1^\star, ..., \mathbf{v}_l^\star\} \text{ - normēta.}$$

TEORĒMA 22.9. *(Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms) H - galīgi dimensionāla, ET, $\underline{\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_l\}}$. Definēsim*

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{e}_1^\star \\ \boldsymbol{g}_2 = \Big(\boldsymbol{e}_2 - < \boldsymbol{e}_2|\boldsymbol{g}_1 > \boldsymbol{g}_1\Big)^\star \\ \boldsymbol{g}_3 = \Big(\boldsymbol{e}_3 - < \boldsymbol{e}_3|\boldsymbol{g}_2 > \boldsymbol{g}_2 - < \boldsymbol{e}_3|\boldsymbol{g}_1 > \boldsymbol{g}_1\Big)^\star \\ \dots \\ \boldsymbol{g}_l = \Big(\boldsymbol{e}_l - \sum_{i=1}^{li1} < \boldsymbol{e}_l|\boldsymbol{g}_i > \boldsymbol{g}_i\Big)^\star \end{cases}$$

Tad

(1) $\langle \boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_l \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_l \rangle$;
(2) $\{\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_l\}$ *ir ortonormēta kopa.*

PIERĀDĪJUMS

$$1.\ \begin{cases} \mathbf{g}_1 \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1 \rangle, \\ \mathbf{g}_2 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle, \\ \dots \\ \mathbf{g}_l \in \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle, \end{cases} \implies \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle$$

2. Izmantosim matemātisko indukciju ar bāzi l.

Indukcijas bāze $l = 1$ - izpildās acīmredzami.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{l-1}\}$ ir ortonormēta un pierādīsim, ka $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{l-1}, \mathbf{g}_l\}$ ir ortonormēta.

Jāpierāda tikai, ka $< \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j >= 0,\ \forall\ j < l$, visi pārējie nosacījumi seko no indukcijas pieņēmuma.

$\mathbf{g}_l = \left(\mathbf{e}_l - \sum\limits_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i \right)^{\star}$. Apzīmēsim

$$\gamma_l = ||\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i|| \iff \gamma_l \mathbf{g}_l = \mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i.$$

$$\forall\ j < l : < \gamma_l \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j >= \gamma_l < \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j >=< \left(\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i \right) | \mathbf{g}_j >=$$

$$< \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_j > - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i >< \mathbf{g}_i | \mathbf{g}_j >=< \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_j > - < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_j >= 0. \blacksquare$$

PIEZĪME 22.10. Seko, ka jebkuru ET bāzi var pārveidot par ortonormētu bāzi ar Grama-Šmita algoritmu. Seko, ka $\forall$ ET E $\exists$ ortonormēta bāze.

PIEZĪME 22.11. Grama-Šmita algoritmu var modificēt tā, lai normēšana notiktu pēc ortogonalizācijas (lai nepatīkamie saucēji parādītos tikai pašās beigās).

PIEZĪME 22.12. No bāzes $\mathcal{B}$ kolonnām var izveidot matricu $\mathbf{B}$, Grama-Šmita algoritmu var interpretēt kā $\mathbf{B}$ reizināšanu no labās puses ar KEP matricām: normēšanai atbilst KEP2, ortogonalizācijai atbilst KEP3. Grama-Šmita algoritma rezultātā iegūsim matricu vienādību $\mathbf{BK} = \mathbf{B}'$, kur $\mathbf{B}'$ kolonnas ir iegūtās ortonormētās bāzes koordinātu kolonnas.

PIEZĪME 22.13. H - Eiklīda vai Ermita telpa, $l = \{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m\} \subseteq H$. Matricu $G(l) = [< \mathbf{l}_j | \mathbf{l}_j >]$ sauc par l *Grama-Šmita matricu.* Var redzēt, ka ortonormētas bāzes Grama-Šmita matrica ir vienības matrica.

22.2.3. Elementu koordinātes attiecībā uz ortonormētu bāzi.

TEORĒMA 22.14. *E - galīgi dimensionāla ET, $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ - ortonormēta bāze. Tad*

(1) $\forall\ \boldsymbol{v} \in E :\ \boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} < \boldsymbol{v} | \boldsymbol{e}_i > \boldsymbol{e}_i$;

(2) $\forall\ \boldsymbol{v} \in E :\ ||\boldsymbol{v}||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} < \boldsymbol{v} | \boldsymbol{e}_i >^2$ *(Parsevāla identitāte).*

PIERĀDĪJUMS

1. Apzīmēsim $\widetilde{\mathbf{v}} = \sum\limits_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i$.

Redzam, ka $\forall\, i : < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > = < \widetilde{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_i > \implies \forall\, i : < \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_i > = 0$

$\implies$ izsakot $\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}$ kā $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ lineāru kombināciju, visi koeficienti ir 0 $\implies \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}}$.

2. $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \implies$

$||\mathbf{v}||^2 = < \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i\Big) \Big| \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_j > \mathbf{e}_j\Big) > = \sum\limits_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i >^2$ (tas seko no skalārā reizinājuma linearitātes un bāzes ortonormalitātes, jāatver iekavas). ■

22.3. Ortogonālie papildinājumi

22.3.1. Pamatfakti.

E - ET, $S \subseteq E$.

$S^\perp \subseteq E$ sauc par S *ortogonālo papildinājumu*, ja

$$\forall\, \mathbf{s} \in S, \forall\, \mathbf{t} \in S^\perp : < \mathbf{s}|\mathbf{t} > = 0.$$

PIEMĒRS 22.15. $E = \mathbb{R}^2$, $S = \{\mathbf{v}\}$.

TEORĒMA 22.16. *E - ET.*

(1) $S^\perp = E \implies S = \{\mathbf{0}\}$.

(2) $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

PIERĀDĪJUMS

1. $S \neq \{\mathbf{0}\} \implies \exists\, \mathbf{v} \neq 0 : < \underbrace{\mathbf{v}}_{\in S} | \underbrace{\mathbf{v}}_{\in E} > = \mathbf{0}$ - pretruna.

2. $\mathbf{v} \in S^\perp \implies < \mathbf{v}|\mathbf{s} > = 0, \forall\, \mathbf{s} \in S \implies$

$< \mathbf{v}|\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{s}_i\Big) > = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i < \mathbf{v}|\mathbf{s}_i > = 0 \implies \mathbf{v} \in \langle S \rangle^\perp$.

$\mathbf{v} \in \langle S \rangle^\perp \implies < \mathbf{v}|\mathbf{s} > = 0, \forall\, \mathbf{s} \in S \implies \mathbf{v} \in S^\perp$. ■

22.3.2. Ortogonālās papildinošās apakštelpas.

TEORĒMA 22.17. *E - galīgi dimensionāla ET.*

(1) $V \leq E \implies V^\perp \leq E$.

(2) $V \leq W \implies W^\perp \leq V^\perp$.

(3) $E = V \oplus V^\perp$.

(4) $\dim E = \dim V + \dim V^\perp$

(5) $(V^\perp)^\perp = V$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^\perp \implies \begin{cases} < \mathbf{v}|\mathbf{w} > = 0 \\ < \mathbf{v}|\mathbf{w}' > = 0, \forall\, \mathbf{v} \in V \end{cases} \implies$

$< \mathbf{v}|\lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{w}' > = 0 \implies \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{w}' \in V^\perp \implies V^\perp \leq E$.

2. $\mathbf{t} \in W^\perp \implies < \mathbf{t}| \underbrace{\mathbf{v}}_{\in V \subseteq W} > = 0 \implies \mathbf{t} \in V^\perp \implies W^\perp \subseteq V^\perp$.

3. $\mathbf{t} \in V \cap V^\perp \implies < \mathbf{t}|\mathbf{t} > = 0 \implies \mathbf{t} = 0$.

4. Seko no papildinošo apakštelpu īpašībām.

5. $\mathbf{v} \in V \implies <\mathbf{v}|\mathbf{w}>= 0,\ \forall\ \mathbf{w} \in V^{\perp} \implies \mathbf{v} \in (V^{\perp})^{\perp} \implies V \leq (V^{\perp})^{\perp}$.

$$\begin{cases} \dim E = \dim V + \dim V^{\perp} \\ \dim E = \dim (V^{\perp})^{\perp} + \dim V^{\perp} \end{cases} \implies \dim V = \dim (V^{\perp})^{\perp} \implies$$

$V = (V^{\perp})^{\perp}$. ■

22.3.3. Projekcijas uz ortogonāli papildinošām apakštelpām.

TEORĒMA 22.18. *E - ET, $V \leq E$.*

(1) $E = V \oplus V^{\perp}$.

(2) $\forall\ \boldsymbol{t} \in E: \begin{cases} \boldsymbol{t} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ \textit{kur}\ \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in V^{\perp} \\ <\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}>= 0 \\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\ \textit{ir noteikti viennozīmīgi.} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_l\} - V\ \textit{bāze} \\ \{\boldsymbol{e}_{l+1}, ..., \boldsymbol{e}_n\} - V^{\perp}\ \textit{bāze} \end{cases} \implies \begin{cases} \boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{l} <\boldsymbol{t}|\boldsymbol{e}_i> \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{w} = \sum\limits_{i=l+1}^{n} <\boldsymbol{t}|\boldsymbol{e}_i> \boldsymbol{e}_i. \end{cases}$

PIERĀDĪJUMS

1. Tika pierādīts agrāk.

2. Tika pierādīts agrāk. Nosacījums $<\mathbf{v}|\mathbf{w}>= 0$ seko no V un $V^{\perp}$ ortogonalitātes.

$$\begin{cases} \mathbf{v} = proj_V(\mathbf{t}) \in V \\ \mathbf{w} = proj_{V^{\perp}}(\mathbf{t}) \in V^{\perp} \end{cases} \implies <\mathbf{v}|\mathbf{w}>= 0.$$

3. Tika pierādīts agrāk. ■

22.4. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 22.19. Noteikt vai dotās funkcijas f ir bilineāras formas.

(1) $L = \mathcal{M}at(n, k),\ f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \det \mathbf{AB}$.

(2) $L = k[X],\ f(p, q) = \int\limits_0^1 p(t)q'(t)dt$.

VINGRINĀJUMS 22.20. L - LT, $f \in \mathcal{B}il(L)$. Pierādīt, ka f - simetriska $\iff$ f matrica attiecībā uz jebkuru bāzi ir simetriska.

VINGRINĀJUMS 22.21. Atrast bilineāras formas matricu attiecībā uz jaunu bāzi.

(1) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$- standarta bāze, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right]$; $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$.

(2) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$- standarta bāze, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$; $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$.

VINGRINĀJUMS 22.22. Noteikt vai dotās funkcijas ir reālie skalārie reizinājumi.

(1) $L = \mathbb{R}[X]_2$, $<p|q>= \int\limits_{-1}^{1} p(t)q''(t)dt$.

(2) $L = \mathbb{R}^3$, $<\mathbf{v}|\mathbf{w}>= v_1w_2 + v_2w_3 + v_3w_1$.

(3) $L = \mathcal{M}at(2, \mathbb{R})$, $<\mathbf{A}|\mathbf{B}>=\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})$.

VINGRINĀJUMS 22.23. Pierādīt, ka bilineārā forma $<\mathbf{A}|\mathbf{B}>= Tr(\mathbf{A}^H\mathbf{B})$ ir skalārais reizinājums LT $\mathcal{M}at(m, n, \mathbb{C})$.

VINGRINĀJUMS 22.24. Dotās bāzes pārveidot par ortonormētām bāzēm attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu izmantojot Grama-Šmita algoritmu.

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $\{(1, 1), (2, 3)\}$.

(2) $E = \mathbb{R}^3$, $\{(1,2,-1),(2,0,1),(3,2,-1)\}$.
(3) $E = \mathbb{R}^4$, $\{(1,1,0,0),(1,1,1,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$.

VINGRINĀJUMS 22.25. Aprakstīt tādu skalāru reizinājumu telpā $\mathcal{M}at(n,\mathbb{R})$, lai standarta bāze $\{\mathbf{E}_{11},...,\mathbf{E}_{nn}\}$ būtu ortonormēta.

VINGRINĀJUMS 22.26. Dota ET $\mathbb{R}^n$ ar skalārā reizinājuma matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz standarta bāzi. Atrast kādu ortonormētu bāzi un dotā elementa v koordinātes attiecībā uz šo bāzi. Pārbaudīt Besseļa vienādību.
(1) $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 5 \end{array}\right]$.
(2) $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 22.27. $E = \mathbb{R}[X]_2$, $< p|q >= \int\limits_0^1 p(t)q(t)tdt$. Atrast kādu ortonormētu bāzi ET E.

VINGRINĀJUMS 22.28. Atrast Eiklīda telpas E apakštelpas V ortogonālā papildinājuma bāzi.
(1) $E = \mathbb{R}^2$, standarta skalārais reizinājums, $V = \langle(2,3)\rangle$.
(2) $E = \mathbb{R}^3$, standarta skalārais reizinājums, $V = \langle(-1,2,1)\rangle$.
(3) $E = \mathbb{R}^4$, standarta skalārais reizinājums,
$V = \langle(1,2,1,2),(3,-1,4,1)\rangle$.

VINGRINĀJUMS 22.29. Atrast Eiklīda telpas E apakštelpas V ortogonālā papildinājuma bāzi.
(1) $E = \mathbb{R}[X]_2$, $< p|q >= \int\limits_0^1 p(t)q(t)dt$, $V = \langle 1 + X\rangle$.
(2) $E = \mathbb{R}^3$, standarta skalārais reizinājums, $V = Ker(\mathbf{A})$, kur $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$.

VINGRINĀJUMS 22.30. E - ET, $V, W \leq E$. Pierādīt, ka
(1) $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$;
(2) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

VINGRINĀJUMS 22.31. Atrast (bezgalīgu) ortonormētu kopu ET $\mathbb{R}[X]$ ar skalāro reizinājumu

$$< p|q >= \int\limits_{-1}^{1} \frac{p(t)q(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

H - galīgi dimensionāla Ermita telpa, $\mathcal{B} = \{b_1,...,b_n\}$- H bāze.

VINGRINĀJUMS 22.32. H - galīgi dimensionāla Ermita telpa, $\mathcal{A} = \{a_1,...,a_n\} \subseteq H$. Pierādīt, ka $\underline{\mathcal{A}} \iff G(\mathcal{A})$ ir invertējama matrica.

23. NODAĻA

Lineārie attēlojumi Eiklīda un Ermita telpās

23.1. Izometriskie lineārie attēlojumi

H, H' - ET. LI $f : H \longrightarrow H'$ sauc par *izometriju*, ja

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H : <\mathbf{v}|\mathbf{w}> = < f(\mathbf{v})|f(\mathbf{w})> .$$

Izometrija saglabā leņķus un normu:
$||\mathbf{v}||^2 = <\mathbf{v}|\mathbf{v}> = < f(\mathbf{v})|f(\mathbf{v})> = ||f(\mathbf{v})||$.

PIEMĒRS 23.1. Rotācija, simetrija.

TEORĒMA 23.2. *H, H' - ET, $\dim H = \dim H' = n$. Tad $\exists$ izometrija $f : H \longrightarrow H'$.*

PIERĀDĪJUMS Izvēlēsimies E un E' ortonormētas bāzes $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ un $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$.

Definēsim

$$f_0 : \mathcal{B} \longrightarrow E'$$
$$f_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \forall\ i$$

un turpināsim to līdz lineāram attēlojumam

$$f : E \longrightarrow E'$$
$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}'_i.$$

$$<\Big(\sum_{i=1}^n v_i\mathbf{e}_i\Big)|\Big(\sum_{i=1}^n w_j\mathbf{e}_j\Big)> = \sum_{i,j} v_i w_j <\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j> = \sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{<\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j>}_{=\delta_{ij}} = \sum_i v_i w_j.$$

$$< f\Big(\sum_{i=1}^n v_i\mathbf{e}_i\Big)|f\Big(\sum_{i=1}^n w_j\mathbf{e}_j\Big) > = \sum_{i,j} v_i w_j < f(\mathbf{e}_i)|f(\mathbf{e}_j) > = \sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{<\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j>}_{=\delta_{ij}} =$$
$\sum_i v_i w_j$.■

PIEZĪME 23.3. $\mathbf{F}$ - izometrijas matrica attiecībā uz kādu bāzi $\Longrightarrow$ $\mathbf{SFS}^{-1}$ arī ir izometrijas matrica.

23.2. Ortogonālās un unitāras matricas

23.2.1. Pamatfakti.

Lietderīgi definēt šādu apzīmējumu

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = j \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

TEORĒMA 23.4. *H - ET, $\dim H = n$, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$ vai $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.*

(1) *$\boldsymbol{A}$ ir izometrijas matrica.*

(2) $\boldsymbol{A}$ *ir pārejas matrica starp divām ortonormētām bāzēm.*
(3) $\boldsymbol{A}$ *rindas veido ortonormētu* $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) *apakškopu attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.*
(4) $\boldsymbol{A}$ *kolonnas veido ortonormētu* $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) *apakškopu attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.*
(5) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ *vai* $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^H$ *(*$\boldsymbol{A}$ *ir ortogonāla (unitāra)* matrica).

PIERĀDĪJUMS
2. $\iff$ 3. $\iff$ 4. $\iff$ 5.

$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ un $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ - ortonormētas bāzes.

Izsakot $\mathcal{B}'$ elementus kā $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas -

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{l=1}^{n} a_{li}\mathbf{e}_l,$$

iegūsim pārejas matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$.

$$\underbrace{< \mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j >}_{=\delta_{ij}} =< \sum_{l=1}^{n} a_{li}\mathbf{e}_l| \sum_{m=1}^{n} a_{mj}\mathbf{e}_m >= \sum_{l,m} a_{li}a_{mj} < \mathbf{e}_l|\mathbf{e}_m >= \sum_{l,m} a_{li}a_{mj}\delta_{lm} = \sum_{l=1}^{n} a_{li}a_{lj} = \delta_{ij}$$

$\iff$ $\mathbf{A}$ kolonnas ir ortonormēta kopa $\iff$ $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$ $\iff$ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ $\Longrightarrow$ $\sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj} = \delta_{ij}$ $\iff$ $\mathbf{A}$ rindas ir ortonormēta kopa.

Strādāsim ortonormētajā bāzē $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.

5. $\Longrightarrow$ 1.

$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ $\Longrightarrow < \mathbf{Av}|\mathbf{Aw} >=< \mathbf{A}^T\mathbf{Av}|\mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{w} > \Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ ir izometrija attiecībā uz $\mathcal{B}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ ir izometrija attiecībā uz $\forall$ bāzi.

1. $\Longrightarrow$ 5.

$< \mathbf{Av}|\mathbf{Aw} >=< \mathbf{A}^T\mathbf{Av}|\mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{w} > \Longrightarrow$

$< \mathbf{A}^T\mathbf{Av}|\mathbf{w} > - < \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0 \Longrightarrow < (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0 \Longrightarrow$

$\forall\ i, j :< (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j >= 0.$

$\forall\ i$ izteiksim $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i$ $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas veidā:
$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} < (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j > \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{O} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$ ■

Definēsim šādus apzīmējumus $n \times n$ matricām:

- ortogonālās matricas - $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$,
- ortogonālās matricas ar determinantu 1 - $SO(n) \subseteq SL(n, \mathbb{R})$,
- unitārās matricas - $U(n) \subseteq GL(n, \mathbb{C})$,
- unitārās matricas ar determinantu 1 - $SU(n) \subseteq SL(n, \mathbb{C})$.

23.2.2. Īpašības.

TEORĒMA 23.5.

(1) $\boldsymbol{A}$ - *ortogonāla (unitāra)* $\Longrightarrow$ $|\det \boldsymbol{A}| = 1$.
(2) $SO(n) \leq O(n) \leq GL(n, \mathbb{R})$.
(3) $SU(n) \leq U(n) \leq GL(n, \mathbb{C})$.
(4) $\boldsymbol{A}$ - *ortogonāla (unitāra),* $\lambda \in \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$ $\Longrightarrow$ $|\lambda| = 1$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\begin{cases} \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{E} \\ \det \mathbf{A}^H = \overline{\det \mathbf{A}} \end{cases} \Longrightarrow |\det \mathbf{A}|^2 = 1 \Longrightarrow |\det \mathbf{A}| = 1.$

2.

3.

4. Pieņemsim, ka $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Tad $< \mathbf{Ax}|\mathbf{Ax} >=< \mathbf{x}|\mathbf{x} >= |\lambda|^2 < \mathbf{x}|\mathbf{x} >$ $\Longrightarrow$ $|\lambda| = 1$. ■

23.3. Ortogonālās un unitārās bāzes maiņas

23.3.1. Unitārās bāzes maiņas - Šura teorēma.

TEORĒMA 23.6. *(Šura teorēma)* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$, $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} = \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A})$.

(1) $\exists$ $\boldsymbol{V} \in U(n) :$ $\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}$, *kur* $\boldsymbol{T} \in \mathcal{UT}(n, \mathbb{C})$ *un* $diag(\boldsymbol{T}) = [\lambda_1, ..., \lambda_n]$.
(2) *Ja papildus tam* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$ *un* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall$ i, *tad* $\boldsymbol{V}$ *var izvēlēties ortogonālā formā.*

PIERĀDĪJUMS

1. Pierādīsim apgalvojumu konstruktīvi.

1.solis Pieņemsim, ka $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ ir normalizēts $\mathbf{A}$ īpašvektors ar īpašvērtību λ_1. Izvēlēsimies $\mathbb{C}^n$ ortonormētu bāzi $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_{12}, ..., \mathbf{w}_{1n}$. Izveidosim matricu $\mathbf{W}_1 = [\mathbf{v}_1|\mathbf{w}_{12}|...|\mathbf{w}_{1n}] \in U(n)$. Redzam, ka

$$\mathbf{W}_1^H\mathbf{A}\mathbf{W}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 \end{array}\right], \text{ kur } \mathcal{S}pec(\mathbf{A}_1) = \{\lambda_2, ..., \lambda_n\}.$$

2.solis Pieņemsim, ka $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ ir normalizēts $\mathbf{A}_1$ īpašvektors ar īpašvērtību λ_2. Izvēlēsimies $\mathbb{C}^{n-1}$ ortonormētu bāzi $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_{23}, ..., \mathbf{w}_{2n}$. Izveidosim matricu $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{v}_2|\mathbf{w}_{23}|...|\mathbf{w}_{2n}] \in U(n-1)$. Redzam, ka

$$\mathbf{U}_2^H\mathbf{A}\mathbf{U}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{array}\right], \text{ kur } \mathcal{S}pec(\mathbf{A}_2) = \{\lambda_3, ..., \lambda_n\}.$$

Definēsim $\mathbf{W}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] = \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{U}_2$. Redzam, ka $\mathbf{W}_2 \in U(n)$ un

$$\mathbf{W}_2^H\mathbf{W}_1^H\mathbf{A}\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{array}\right]$$

3.solis ....

Aprakstītā algoritma rezultātā iegūsim matricu $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1\mathbf{W}_2...\mathbf{W}_n \in U(n)$: $\mathbf{V}^H\mathbf{A}\mathbf{V} \in \mathcal{UT}(n, \mathbb{C})$ un galvenās diagonāles ir $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

2. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall$ i $\Longrightarrow$ $\forall$ īpašvektorus, kas ir minēti 1.apgalvojuma algoritmā, var izvēlēties ar reālām koordinātēm. ■

23.3.2. Ortogonālās bāzes maiņas.

TEORĒMA 23.7. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ - $\boldsymbol{A}$ reālās īpašvērtības, $\{\alpha_1 \pm \beta_1, ..., \alpha_t \pm \beta_t\}$ - $\boldsymbol{A}$ kompleksās īpašvērtības. Tad $\exists\ \boldsymbol{V} \in O(n)$: $\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}$, kur*

- $\boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{R} & * \\ \hline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{array}\right]$,
- *$\boldsymbol{R} \in \mathcal{UT}(n, \mathbb{R})$, kurai uz galvenās diagonāles ir $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$,*
- *$\boldsymbol{C}$ ir bloku augšēji trijstūrveida matrica, kurai uz galvenās diagonāles ir 2×2 bloki $\left[\begin{array}{c|c} \alpha_i & \beta_1 \\ \hline -\beta_i & \alpha \end{array}\right]$, $\forall\ i \in \{1, ..., t\}$.*

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim apgalvojumu konstruktīvi.
■

23.4. Simetriskie un normālie operatori

23.4.1. Saistītie lineārie attēlojumi.

TEORĒMA 23.8. *H, H' - galīgi dimensionālas ET, $f \in \mathcal{H}om(H, H')$. Tad eksistē tieši viens $f^* \in \mathcal{H}om(H', H)$ (f saistītais attēlojums):*

$$(f(v), w) = (v, f^*(w)), \forall\ v \in H, w \in H'.$$

PIERĀDĪJUMS

TEORĒMA 23.9. *H, H' - galīgi dimensionālas ET ar fiksētām ortonormētām bāzēm $\mathcal{B}_H$ un $\mathcal{B}_{H'}$, $f \in \mathcal{H}om(H, H')$, $\boldsymbol{F}$ - f matrica attiecībā uz $\mathcal{B}_H$. Tad f^* matrica attiecībā uz $\mathcal{B}_{H'}$ ir $\boldsymbol{F}^T$ vai $\boldsymbol{F}^H$.*

PIERĀDĪJUMS

23.4.2. Pašsaistītie un normālie attēlojumi. LO f Eiklīda vai Ermita telpā sauc par

- *pašsaistītu*, ja $f = f^*$,
- *normālu*, $ff^* = f^*f$.

Matricu $\mathbf{A}$ sauc par normālu, ja $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ (tā ir normāla LO matrica attiecībā uz jebkuru bāzi).

TEORĒMA 23.10.

(1) *LO ir pašsaistīts tad un tikai tad, ja eksistē ortonormēta bāze, attiecībā uz kuru tā matrica ir simetriska matrica vai Ermita matrica.*
(2) *$\boldsymbol{A}$ ir simetriska (Ermita), antisimetriska (anti-Ermita) vai ortogonāla (unitāra) matrica $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ ir normāla.*
(3) *$\boldsymbol{A}$ - normāla matrica $\Longrightarrow$ ($\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{A}^H = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}$).*

PIERĀDĪJUMS
1.

2.

3. $\mathbf{A}$ ir normāla $\Longrightarrow$ $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ ir normāla.

$\mathbf{B}$ - normāla matrica $\Longrightarrow$
$||\mathbf{Bv}||^2 =< \mathbf{Bv}|\mathbf{Bv} >=< \mathbf{v}|\mathbf{B}^H\mathbf{Bv} >=< \mathbf{v}|\mathbf{BB}^H\mathbf{v} >=< \mathbf{B}^H\mathbf{v}|\mathbf{B}^H\mathbf{v} >= ||\mathbf{B}^H\mathbf{v}||^2$.

$\Longrightarrow$ $||\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v}|| = ||\mathbf{A}^H\mathbf{v} - \overline{\lambda}\mathbf{v}||$ $\Longrightarrow$ $\left(\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \iff \mathbf{A}^H\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}\right)$ ■

23.4.3. Simetrisku un normālu matricu unitārā un ortogonālā diagonalizācija.

TEORĒMA 23.11. *(spektrālā teorēma)*

(1) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$ - normāla matrica $\iff$ $\mathbf{V}^H\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica un $\mathbf{V}$ ir unitāra matrica.
(2) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$ - simetriska matrica $\iff$ $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$, kur $\mathbf{D}$ ir diagonāla matrica un $\mathbf{V}$ ir ortogonāla matrica.
(3) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$ - normāla matrica $\Longrightarrow$ $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{B}$, kur $\mathbf{B}$ ir bloku diagonāla matrica ar bloku izmēriem 1×1 un 2×2 un $\mathbf{V}$ ir ortogonāla matrica.

PIERĀDĪJUMS
1. Vienā virzienā -

$\mathbf{V}^H\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D} \implies \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{D} \implies \mathbf{V}$ kolonnas $\{\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_n\}$ ir $\mathbf{A}$ ortonormēti īpašvektori ar īpašvērtībām λ_i.

$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \implies <\mathbf{A}^H\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j> = <\mathbf{v}_i|\mathbf{A}\mathbf{v}_j> = \overline{\lambda_i}\delta_{ij}$. $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$.

Otrā virzienā -

Apzīmēsim telpu, kurā darbojas $\mathbf{A}$ ar L. $\left(\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{A}^H = \overline{\lambda}\mathbf{x}\right) \implies \mathbf{A}^H(L^\lambda) \subseteq L^\lambda$ - L^λ ir $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}^H$ invarianta apakštelpa.

Pierādīsim, ka $\mathbf{A}(L^\lambda)^\perp \subseteq (L^\lambda)^\perp$.

$v \in L^\lambda$. $<\mathbf{w}|\mathbf{v}> = 0 \implies <\mathbf{A}\mathbf{w}|\mathbf{v}> = <\mathbf{w}|\mathbf{A}^H\mathbf{v}> = <\mathbf{w}|\overline{\lambda}\mathbf{v}> = \overline{\lambda} <\mathbf{w}|\mathbf{v}> = 0$.

$(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A} \implies (L^\lambda)^\perp$ ir $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}^H$ invarianta apakštelpa.

Izmantosim indukciju ar paramametru $\dim L$.

$\dim L = 1$ apgalvojums ir acīmredzams.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā, ja $\dim L < n$. Tad uz L^λ un $\dim(L^\lambda)^\perp$ $\mathbf{A}$ ir normāls $\implies$ $\mathbf{A}$ ir diagonalizējams saskaņā ar indukcijas pieņēmumu.

2.

3. ■

23.5. Pozitīvi definētie operatori un matricas

LO f Eiklīda vai Ermita telpā sauc par

- *pozitīvi definētu*, ja $< f(\mathbf{v})|\mathbf{v} > 0, \forall\ \mathbf{v} : ||\mathbf{v}|| \neq 0$.
- *nenegatīvi definētu*, ja $< f(\mathbf{v})|\mathbf{v} > \geq 0, \forall\ \mathbf{v} : ||\mathbf{v}|| \neq 0$.

Matricu sauc par pozitīvi vai nenegatīvi definētu, ja tā ir atbilstoša tipa LO matrica attiecībā uz jebkādu bāzi. Ja $\mathbf{A}$ ir pozitīvi (nenegatīvi) definēta, tad apzīmēsim to ar $\mathbf{A} \succ 0$ ($\mathbf{A} \succeq 0$).

TEORĒMA 23.12.

(1) $\boldsymbol{A} \succ 0 \implies \boldsymbol{A} \succeq 0$.
(2) $\boldsymbol{A} \succeq 0 \implies \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$.
(3) $\boldsymbol{A} \succ 0 \iff \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}^+$.
(4) $\boldsymbol{A} \succeq 0 \iff \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

PIERĀDĪJUMS

TEORĒMA 23.13. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$. *Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti.*

(1) $\boldsymbol{A} \succ 0$.

(2) $\begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H, \\ \mathcal{S}pec(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$

(3) $\exists\ \boldsymbol{B} \in GL(n, \mathbb{C})$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^H$.

PIERĀDĪJUMS

23.6. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 23.14. Kuras no elementārajām matricām ir unitāras?

VINGRINĀJUMS 23.15. Pierādīt, ka $\forall\ \mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$ var viennozīmīgi izteikt formā $\mathbf{A} = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$, kur $\mathbf{B}$ un $\mathbf{C}$ ir Ermita matricas.

24. NODAĻA

Eiklīda telpu teorijas lietojumi

24.1. Palīgrezultāti

24.1.1. Ortoprojektori.

E - ET, $V \subseteq E$.

$V^{\perp}$ ir noteikta viennozīmīgi $\Longrightarrow$ $proj_V(\mathbf{t})$ arī ir noteikta viennozīmīgi $\forall$ $\mathbf{t}$, ja papildinošā apakštelpa ir $V^{\perp}$.

Definēsim *ortoprojekciju* $p_V : E \longrightarrow E$ kā projekciju uz V, ja papildinošā apakštelpa ir $V^{\perp}$:

$$\forall \ \mathbf{t} \in E \ p_V(\mathbf{t}) = \mathbf{v} \iff \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \text{ kur } \begin{cases} \mathbf{v} \in V \\ \mathbf{w} \in V^{\perp}. \end{cases}$$

Piezīme 24.1. No iepriekšējās teorēmas seko, ka

$$\mathbf{t} = p_V(\mathbf{t}) + p_{V^{\perp}}(\mathbf{t}).$$

Teorēma 24.2. *E - ET, $V \leq E$.*
(1) $p_V \in \mathcal{E}nd(E)$.
(2) $Im(p_V) = V$.
(3) $Ker(p_V) = V^{\perp}$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\begin{cases} p_V(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \\ p_V(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \end{cases} \Longrightarrow p_V(\mathbf{t}) + p_V(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i =$
$\sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i + < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i =$
$\sum_{i=1}^{l} \Big(< \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > + < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \Big)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t} + \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i = p_V(\mathbf{t} + \mathbf{u})$.
Reizināšana ar λ tiek pārbaudīta līdzīgi.

2. $Im(p_V) \leq \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle = V$.
$\forall \ \mathbf{v} \in V : \ p_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \Longrightarrow Im(p_V) = V$.

3. $\mathbf{w} \in Ker(p_V) \iff < \mathbf{w}|\mathbf{e}_i >= 0, \ \forall \ i \iff \mathbf{w} \in V^{\perp}$.■

Teorēma 24.3. *E - ET, $V \leq E$. Tad*

$$||\boldsymbol{t}||^2 = ||p_V(\boldsymbol{t})||^2 + ||p_{V^{\perp}}(\boldsymbol{t})||^2.$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\mathbf{v} = p_V(\mathbf{t})$, $\mathbf{w} = p_{V^{\perp}}(\mathbf{t})$.
$||\mathbf{t}||^2 = ||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v} + \mathbf{w}|\mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2\underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}_{=0} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >= ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2$. ■

Teorēma 24.4. *E - ET, $V \leq E$. $\forall$ $\boldsymbol{t} \in E$:*
(1) $||\boldsymbol{t} - p_V(\boldsymbol{t})|| \leq ||\boldsymbol{t} - \boldsymbol{v}||, \ \forall \ \boldsymbol{v} \in V$;
(2) $||\boldsymbol{t} - p_V(\boldsymbol{t})|| = ||\boldsymbol{t} - \boldsymbol{v}||$, *kur* $\boldsymbol{v} \in V \iff \boldsymbol{v} = p_V(\boldsymbol{t})$.

(3) $||\boldsymbol{t} - p_V(\boldsymbol{t})|| = \min_{\boldsymbol{v} \in V} ||\boldsymbol{t} - \boldsymbol{v}||$.

PIERĀDĪJUMS

$\underbrace{\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})}_{\in V^\perp} = \mathbf{t} - p_V(\mathbf{t}) \pm \mathbf{v} = (\mathbf{t} - \mathbf{v}) + \underbrace{(\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t}))}_{\in V} \implies$

$\mathbf{t} - \mathbf{v} = (\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})) - (\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t})) \implies$

$$||\mathbf{t} - \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})||^2 + ||\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t})||^2 \implies$$

$\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t}) = 0 \iff ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})||^2$

$\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t}) \neq 0 \iff ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||^2 < ||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})||^2$. ■

PIEMĒRS 24.5. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

24.2. Lineāru vienādojumu sistēmu tuvināta risināšana

24.2.1. Motivējošs piemērs.

PIEMĒRS 24.6. Ir doti vairāki mērījumu pāri $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Ir hipotēze, ka x_i un y_i saista lineāra sakarība. Var uzdot šādus jautājumus:

(1) vai eksistē tāda lineāra funkcija

$$f(x) = y = ax + b :$$
$$y_i = f(x_i) = ax_i + b, \ \forall \ i?$$

Iegūsim LVS

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ... \\ ax_n + b = y_n. \end{cases}$$

Ja $n > 2$, tad visdrīzāk (reāla eksperimenta gadījumā) LVS nebūs atrisinājumu attiecībā uz (a, b) - vienādojumu (nosacījumu) skaits ir lielāks nekā nezināmo skaits.

(2) vai var atrisināt doto LVS attiecībā uz (a, b) *tuvināti:* atrast tādus a, b, lai vienādības kopumā izpildītos pēc iespējas precīzāk (kaut arī varbūt neviena vienādība neizpildās precīzi),

ğeometriski tas nozīmē novilkt plaknē taisni tā, lai tā "vislabāk" atbilstu doto punktu (x_i, y_i) kopai.

Var meklēt tādu $f(x) = ax + b$, lai $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2$ būtu minimāla.

24.2.2. Problēmas nostādne un atrisinājums.

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$.

$\forall \ \mathbf{y} \in \mathcal{M}at(m, 1, \mathbb{R})$ definēsim *atlikumu vektoru* $\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ay}$.

PIEZĪME 24.7. Ja $\mathbf{x}$ ir LVS (precīzs) atrisinājums, tad $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Risinot LVS tuvināti, var pieprasīt, lai atlikumu vektora norma (kļūda) ir minimāla.

Uzdevums: atrast $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}at(m, 1, \mathbb{R})$: $||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0||$ ir minimāla :

$$||\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)|| = ||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0|| = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}at(m,1,\mathbb{R})} ||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}||.$$

Šādu $\mathbf{x}_0$ sauc par *mazāko kvadrātu atrisinājumu.*

Izmantosim LVS kolonnu ainu. $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1|...|\mathbf{A}_n]$. Tad $\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{A}_1 + ... + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \implies \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathbf{A}_i$.

TEORĒMA 24.8. *$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$, $V = \langle \boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_n \rangle$,*

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n, 1, \mathbb{R}).$$

Tad $\boldsymbol{x}_0$ minimizē $||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}|| \iff p_V(\boldsymbol{b}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{A}_i$.

PIERĀDĪJUMS Seko no iepriekšējās teorēmas. ■

24.2.3. Normālās sistēmas.

TEORĒMA 24.9. *$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$,*
$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n, 1, \mathbb{R})$.

$\boldsymbol{x}_0$ minimizē $||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}|| \iff \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$.

PIERĀDĪJUMS $V = K(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n \rangle$.

No iepriekšējās teorēmas:

$\mathbf{x}_0$ minimizē $||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}|| \iff p_V(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{A}_i = \mathbf{Ax}_0 \iff$

$\mathbf{b} = p_V(\mathbf{b}) + p_{V^\perp}(\mathbf{b}) \iff \mathbf{b} = \mathbf{Ax}_0 + p_{V^\perp}(\mathbf{b}) \iff$

$\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0 \in V^\perp \iff \forall\ i : < \mathbf{A}_i|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0 >= 0 \iff$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = 0 \\ ... \\ \mathbf{A}_n^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = 0 \end{cases} \iff \mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}^T\mathbf{b} - \mathbf{A}^T\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}^T\mathbf{b} =$$
$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}_0$. ■

LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ sauc par *normālo LVS* attiecībā uz LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

PIEMĒRS 24.10. Taisnes $y = ax + b$ novilkšana caur vairākiem punktiem (x_i, y_i) plaknē.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \hline x_2 & 1 \\ \hline ... & ... \\ \hline x_n & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \hline b \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline ... \\ \hline y_n \end{bmatrix}.$$

24.2.4. Normālo sistēmu atrisināmība - bez pierādījumiem.

TEORĒMA 24.11. *$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$,*
$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n, 1, \mathbb{R})$.

(1) *LVS $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ $\exists$ tieši viens atrisinājums $\iff r(\boldsymbol{A}) = n$.*
(2) *LVS $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ ir saderīga.*

PIERĀDĪJUMS Skatīt papildmateriālu. ■

24.3. Funkciju aproksimācijas uzdevums

24.3.1. Motivācija.

Tuvinātajos aprēķinos var sastapties ar šādu problēmu -

- ir dota funkcija f, kuras vērtības ir grūti aprēķināmas, piemēram,
  - transcendentāla funkcija,
  - funkcija, kura ir definēta netiešā veidā,
  - funkcija, kura ir definēta ar darbietilpīga algoritma palīdzību,
  - funkcija, kuras vērtības ir zināmas tikai mazā definīcijas apgabala apakškopā,
- ir dota "vienkāršāku" funkciju kopa $\{g_1, .., g_n, ...\}$, piemēram,
  - monomi,
  - polinomi,
  - racionālas funkcijas,
  - trigonometriskas funkcijas,

- – dota diferenciālvienādojuma atrisinājumi,
  – ar noteiktu algoritmu palīdzību definētas funkcijas,
- kā atrast tādu funkciju $g = \sum_i g_i$, lai f un g būtu "pēc iespējas tuvākas" vai, lai $f - g$ būtu "pēc iespējas mazāka" funkcija?

Ja funkcijas pieder kādai ET E, tad problēmu var mēğināt risināt ar ortoprojekciju palīdzību un tuvību mērīt izmantojot Eiklīda normu.

24.3.2. Problēmas risināšana ar ortoprojekciju palīdzību.
E - funkciju ET (parasti bezgalīgi dimensionāla), $f \in E$,
$\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n, ...\} \subseteq E$ - ortonormēta kopa, ne obligāti galīga.
$\forall\ f \in E$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ definēsim *Furjē koefiecientus*

$$f_n =< f|\varphi_n > .$$

Apzīmēsim $\Phi_n = \langle\varphi_1, ..., \varphi_n\rangle$, $\Psi_n = \langle\Phi_n\rangle$.

Piemērs 24.12. $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $< f|g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$,
$\Phi = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, ...\}$.
Furjē koeficienti -

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)dt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)dt.$$

Teorēma 24.13. *E - bezgalīgi dimensionāla ET, $f \in E$.*
$\Phi = \{\varphi_1, ...\} \subseteq E$ - ortonormēta kopa,
$\Psi_n = \langle\varphi_1, ..., \varphi_n\rangle$,
f_n - f Furjē koeficienti attiecībā uz Φ_n.

Tad
(1) $||f - p_{\Psi_n}(f)|| = \min_{g \in \Psi_n} ||f - g||$,
(2) $p_{\Psi_n}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\varphi_i$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pierādīts iepriekšējā teorēmā.

2. Pierādīts agrāk. ■

24.4. Vingrinājumi

Vingrinājums 24.14. Atrast ET E (ar standarta skalāro reizinājumu) elementa $\mathbf{t}$ ortoprojekcijas uz V un $V^\perp$.

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ \hline 4 \end{bmatrix}$, $V = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \rangle$;

(2) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$, $V = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \end{bmatrix} \rangle$;

(3) $E = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -2 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \end{bmatrix}$, $V = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \rangle$;

VINGRINĀJUMS 24.15. Atrisiniet dotajām LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atbilstošās normālās sistēmas un atrodiet atrisinājumu atlikuma normu. Ja atrisinājums nav noteikts viennozīmīgi, mēģiniet atrast atrisinājumus ar minimālo normu.

(1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hline 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 2 \end{bmatrix}$;

(2) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 5 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ \hline 4 \\ \hline 7 \end{bmatrix}$;

(3) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & -3 \\ \hline 3 & -2 \end{array}\right]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$;

(4) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & -1 \\ \hline -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline -2 \end{bmatrix}$.

VINGRINĀJUMS 24.16. $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$,
$\Phi = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, ...\}$. Atrast Furjē koeficientus funkcijai f.

(1) $f(x) = \sin 2x$;
(2) $f(x) = 1$.
(3) $f(x) = x$.

VINGRINĀJUMS 24.17. Atrodiet bezgalīgas ortonormētas polinomiālu funkciju kopas piemēru, ja skalārais reizinājums ir $< f|g >= \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

VINGRINĀJUMS 24.18. E - galīgi dimensionāla ET, $W \leq V \leq E$. Pierādīt, ka

$$||v - p_V(v)|| \leq ||v - p_W(v)||.$$

25. NODAĻA

Matricu faktorizācijas ar Eiklīda un Ermita telpu teorijas izmantošanu

25.1. QR faktorizācija

TEORĒMA 25.1. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,\mathbb{R})$, $rk(\boldsymbol{A}) = n$. Tad*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}, \text{ kur}$$

- *$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}at(m,n,\mathbb{R})$, $\boldsymbol{Q}$ kolonnas ir ortonormētas attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu;*
- *$\boldsymbol{R}$ - augšēji trijstūrveida matrica ar nenulles elementiem uz galvenās diagonāles.*

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1|...|\mathbf{A}_n]$. Uzskatīsim $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ par ET elementiem, pielietosim Grama-Šmita algoritmu, iegūsim ortonormētus elementus $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_n$:

- $\langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_i \rangle = \langle \mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_i \rangle$,
- $\begin{cases} \mathbf{Q}_1 = t_{11}\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{Q}_2 = t_{12}\mathbf{A}_1 + t_{22}\mathbf{A}_2 \\ ... \\ \mathbf{Q}_n = t_{1n}\mathbf{A}_1 + ... + t_{nn}\mathbf{A}_n. \end{cases}$

Apzīmēsim $\begin{cases} \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_n] \\ \mathbf{T} = [t_{ij}]_{n,n} \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{AT}$.

$\langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_i \rangle = \langle \mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_i \rangle \Longrightarrow \forall\, i: \ t_{ii} \neq 0 \Longrightarrow \exists\, \mathbf{T}^{-1} \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\underbrace{\mathbf{T}^{-1}}_{=\mathbf{R}} = \mathbf{QR}$. $\mathbf{T}$ augšēji trijstūrveida $\Longrightarrow \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}$ - augšēji trijstūrveida.

25.2. Singulāro vērtību faktorizācija

TEORĒMA 25.2. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k)$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tad*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^H, \text{ kur}$$

- *$\boldsymbol{U} \in U(m)$,*
- *$\Sigma \in diag(m,n,\mathbb{R})$, $\sigma_{ii} \geq 0$, $\forall\, i$,*
- *$\boldsymbol{V} \in U(n)$.*

PIERĀDĪJUMS Matrica $\mathbf{A}^H\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,\mathbb{C})$ ir Ermita matrica $\Longrightarrow$ tā ir unitāri diagonalizējama. Papildus tam, $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ īpašvērtības ir nenegatīvas:

$(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Longrightarrow ||\mathbf{Av}||^2 =< \mathbf{Av}|\mathbf{Av} >=< \mathbf{A}^H\mathbf{Av}|\mathbf{v} >=< \lambda\mathbf{v}|\mathbf{v} >= \lambda||\mathbf{v}||^2$,

$\begin{cases} ||\mathbf{Av}||^2 \geq 0 \\ ||\mathbf{v}||^2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda \geq 0.$

Pieņemsim, ka $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > \underbrace{\lambda_{r+1}}_{=0} = \lambda_{r+1} = ...$

Definēsim $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Seko, ka $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > \underbrace{\sigma_{r+1}}_{=0} = \sigma_{r+1} = ...$

Seko, ka $\exists\, \mathbf{V} \in U(n)$:

- $\mathbf{V}^H(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\mathbf{V} = \Sigma$, kur Σ ir diagonāla matrica ar nenegatīviem elementiem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ....$ ($\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ īpašvērtībām) uz galvenās diagonāles,

- $\mathbf{V}$ kolonnas ir ortonormētu $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ īpašvektoru koordinātu kolonnas (attiecībā uz standarta bāzi): $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1|...|\mathbf{v}_n] \implies (\mathbf{A}^H\mathbf{A})\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$.

Pierādīsim, ka kopa $\{\mathbf{Av}_1, ..., \mathbf{Av}_n\}$ ir ortogonāla:

$$< \mathbf{Av}_i|\mathbf{Av}_j >=< \mathbf{A}^H\mathbf{Av}_i|\mathbf{v}_j >= \lambda_i < \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j >= \lambda_i\delta_{ij}.$$

Seko, ka $\mathbf{AV}$ kolonnas ir ortogonālas.

Redzam, ka $||\mathbf{Av}_i||^2 =< \mathbf{Av}_i|\mathbf{Av}_i >=< \mathbf{A}^H\mathbf{Av}_i|\mathbf{v}_i >= \lambda_i < \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_i >= \lambda_i$.

$\forall\ i \in \{1, ..., r\}$ definēsim $\mathbf{u}_i = \dfrac{1}{||\mathbf{Av}_i||}\mathbf{Av}_i = \dfrac{1}{\sigma_i}\mathbf{Av}_i$, iegūsim ortonormētu kopu $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r\}$. Turpināsim to līdz bāzei, pēc tam pārveidosim to par ortonormētu bāzi ar Grama-Šmita algoritmu. Iegūsim matricu $\mathbf{U}$.

Redzam, ka $\mathbf{AV} = \mathbf{A}[\mathbf{v}_1|...|\mathbf{v}_n] = [\mathbf{Av}_1|...|\mathbf{Av}_n] = [\sigma_1\mathbf{u}_1|...|\sigma_r\mathbf{u}_r|\mathbf{0}|...|\mathbf{0}] = \mathbf{U}\Sigma$, kur Σ ir diagonāla matrica ar diagonāles elementiem $[\Sigma]_{ii} = \sigma_i$.

$\mathbf{V}$ ir unitāra $\implies$ $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ ■

PIEZĪME 25.3. Nenulles elementus σ_i sauc par $\mathbf{A}$ *singulārajām vērtībam.*

25.3. Polārā faktorizācija

TEORĒMA 25.4. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$. Tad $\exists$ $\boldsymbol{U} \in U(n)$, $P \succeq 0$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UP}$.*

PIERĀDĪJUMS

25.4. Holeska faktorizācija

TEORĒMA 25.5. *$\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$, $\boldsymbol{A} \succ 0$. Tad $\exists$ $C \in \mathcal{UT}(n, n, \mathbb{C})$:*
- *$[\boldsymbol{C}]_{ii} > 0$, $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$,*
- *$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{CC}^H$.*

PIERĀDĪJUMS

25.5. Šura faktorizācija

25.6. Vingrinājumi

VINGRINĀJUMS 25.6. Atrast doto matricu QR faktorizācijas.

(1) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}\right]$.

(2) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

(3) $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline -1 & 4 \end{array}\right]$.

26. NODAĻA

Tenzoru reizinājums

26.1. Lineāro telpu tenzoru reizinājums

26.1.1. Lineāru telpu tiešais reizinājums un multilineārie attēlojumi.

26.1.1.1. *Lineāru telpu tiešais reizinājums.* $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - k-lineāru telpu kopa. Definēsim šīs kopas elementu tiešo reizinājum $\widehat{L} = \prod\limits_{\alpha \in I} L_\alpha$, tā elementi ir virknes $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...)$, kur $\mathbf{u}_\alpha \in L_\alpha$ $\forall\ \alpha \in I$.

Kopā $\widehat{L}$ definēsim šādas operācijas:

- saskaitīšana - $(\mathbf{u}_1, ...) + (\mathbf{u}'_1, ...) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}'_1, ...)$,
- reizināšanu ar k elementu - $\lambda(\mathbf{u}_1, ...) = (\lambda \mathbf{u}_1, ..)$.

Kopā $\widehat{L}$ definēsim apakškopu L_{fin}, kas satur elementus, kuriem tikai galīgs skaits komponenšu ir atšķirīgs no 0.

Teorēma 26.1. *$\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - k-lineāru telpu kopa, $\widehat{L} = \prod\limits_{\alpha \in I} L_\alpha$.*

(1) *$\widehat{L}$ - k-lineāra telpa.*
(2) *$L_{fin} \leq \widehat{L}$.*
(3) *I - galīga kopa $\implies$ $\widehat{L} \simeq \bigoplus\limits_{\alpha \in I} L_\alpha$.*

PIERĀDĪJUMS
■

26.1.1.2. *Multilineārie attēlojumi.* Funkciju

$$f : \widehat{L} \longrightarrow V,$$
$$(\mathbf{u}_1, ...) \mapsto f(\mathbf{u}_1, ...),$$

sauc par *multilineāru attēlojumu,* ja tas ir LA attiecībā uz katru argumentu, pārējos argumentus fiksējot. Ja $L_1 = ... = L_m$ un $V = k$, tad multilineāru attēlojumu sauc par *multilineāru formu.*Visu multilineāru attēlojumu kopu no $L_1, ..., L_m$ uz V apzīmēsim ar $\mathcal{H}om(L_1, ..., L_m, V)$.

Kopā $\mathcal{H}om(L_1, ..., L_m, V)$ var definēt saskaitīšanu un reizināšanu ar lauka elementu:

- $(f + g)(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) = f(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) + g(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m)$,
- $(\lambda f)(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) = \lambda f(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m)$.

Teorēma 26.2. *$L_1, ..., L_m, V$ - k-lineāras telpas. $\mathcal{H}om(L_1, ..., L_m, V)$ ir k-lineāra telpa.*

PIERĀDĪJUMS
■

26.1.2. Definīcija.

$L_1, ..., L_m$ - k-lineāras telpas. k-lineāru telpu T sauc par $L_1, ..., L_m$ *tenzoru reizinājumu,* ja $\exists$ LA $\varphi : \prod\limits_{i=1}^{m} L_i \to T$ tāds, ka $\forall$ LA $f : \prod\limits_{i=1}^{m} L_i \to V$ $\exists$ tieši viens LA $\psi : T \to V$: $f = \psi \circ \varphi$.

26.1.3. Konstrukcija.

26.2. Lineāro attēlojumu tenzoru reizinājums

26.3. Vingrinājumi

Vingrinājums 26.3.

Vingrinājums 26.4.

Vingrinājums 26.5.

Vingrinājums 26.6.

Vingrinājums 26.7.